Beweistechniken
Vollständige Induktion - Beispiele, Erweiterungen und Übungen

Alex Chmelnitzki

15. März 2005

1 Starke Induktion

Eine etwas abgewandelte Form der Induktion ist die sogenannte starke Induktion. Bei dieser Spielart besteht die Induktionsvoraussetzung nicht bloß aus der Annahme, dass etwas für n gilt, sondern *für alle Zahlen kleiner oder gleich n.* Diese Technik kann sehr nützlich sein und in Aufgaben Anwendung finden, in denen uns die „gewöhnliche“ Induktion nicht weiterbringt.

Hier ein Beispiel: wir wollen beweisen, dass jede natürliche Zahl, die größer oder gleich zwei ist, entweder eine Primzahl oder das Produkt von mindestens zwei Primzahlen ist.
Das ist sicherlich richtig für die Zahl 2, denn sie ist selber eine Primzahl.
Nun kommt der Induktionsschritt: Angenommen die Aussage stimmt für alle Zahlen $\leq n$. Nehmen wir die Zahl n+1. Entweder sie ist eine Primzahl, was die Aussage bestätigen würde, oder n+1=$p \times q$ für irgendwelche Zahlen p und q, die beide kleiner sind als n+1. (Du erinnerst dich, dass nach Definition eine Zahl prim ist, wenn sie nur durch sich selbst und durch eins teilbar ist. Das bedeutet, dass wenn eine Zahl nicht prim ist, sie durch zwei Zahlen teilbar sein muss, die beide kleiner sind als die Zahl selbst.) Aber nach Induktionsvoraussetzung sind p und q beide Produkte von Primzahlen und somit ist auch n+1=p*q eins!

2 Einige Übungsaufgaben

2.1 Quadratzahlen sind Summen von ungeraden Zahlen

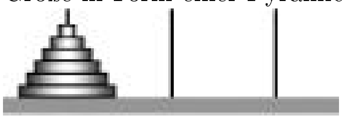
Beweise durch Induktion, dass n^2 die Summe der ersten n ungeraden Zahlen ist, oder in Symbolsprache:

$$n^2 = 1 + 3 + 5 + \ldots + 2n - 1 = \sum_{i=1}^{n} 2n - 1$$

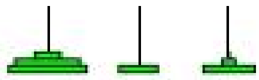
2.2 Der Turm von Hanoi

Dieses Spielt wurde vom französischen Mathematiker Edouard Lucas in 1883 erfunden. Wir haben drei Stäbe, auf einem von denen n Scheiben verschiedener

Größe in Form einer Pyramide angeordnet sind:



Ein Zug besteht darin, von einem Stab die oberste Scheibe herunterzunehmen und auf einen anderen Stab zu setzen. Dabei darf aber niemals eine größere Scheibe auf einer kleineren liegen. So könnte also die Position nach einigen Zügen aussehen, wenn n=6 ist:



Es gibt viele Aspekte an diesem Spiel, die für den Mathematiker interessant sind. Wir stellen uns erstmal nur die Frage, wieviele Züge wir brauchen um die komplette Pyramide von einem Stab auf einen der anderen beiden zu verschieben.

2.2.1

Wieviele Züge brauchst du bei einer Scheibe? Und bei 2 Scheiben? Wieviele sind es bei 3 Scheiben? Du kannst es mit Münzen, Bierdeckeln verschiedener Größe oder einfach deiner Fantasie ausprobieren.

2.2.2

Versuche, eine Vermutung zu äußern wie die allgemeine Formel für n Scheiben aussieht! Schreibe hierzu die Werte die du für n=1,2,3 herausbekommen hast in eine kleine Tabelle und schaue, ob dir eine Regelmäßigkeit auffällt.
Tip: Bei 4 Scheiben wirst du 15 Züge brauchen.

2.2.3

Beweise deine Vermutung durch Induktion. Überlege hierzu, wie du eine Pyramide aus n+1 Scheiben verschieben würdest, wenn du bereits wüsstest wie man eine Pyramide aus n Scheiben verschiebt!

2.3 Geometrische Reihe

Versuche, durch vollständige Induktion zu zeigen, dass $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} < 2$ für alle $n \geq 1$!
Du wirst feststellen, dass es hierbei ein Problem gibt. Welches?
Nun beweise durch vollständige Induktion, dass $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$ für alle $n \geq 1$!

2.4 Übung zur starken Induktion

Man weiß, dass für jede Zahl $n \geq 3$ es eine Primzahl p gibt, die zwischen n/2 und n liegt, also n/2 < p < n. Benutze diese Tatsache und die Technik der starken Induktion, um zu beweisen, dass jede natürliche Zahl eine Summe von *verschiedenen* Primzahlen ist. (Hier wird auch die 1 als Primzahl betrachtet.)

2.5 Fibonacci-Zahlen

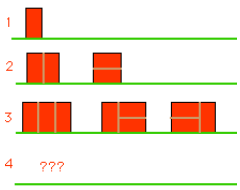
Die Fibonacci-Folge ist eine der bekanntesten sogenannten rekursiven Folgen. Relursiv bedeutet, dass jedes Glied der Folge durch die vorhergehenden definiert ist. Die Folge sieht folgendermaßen aus:
Die erste Zahl, wir nennen sie a_1, ist 1. Die zweite ist zwei: $a_2 = 2$.
Um nun die n-te Zahl zu finden brauchen wir die beiden vorhergehenden. Die Formel ist $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. Das bedeutet, dass jede Zahl der Folge die Summe der beiden vorhergehenden ist.

2.5.1

Schreibe die ersten 8 Glieder der Folge auf!

2.5.2

Stell dir vor, du baust eine Mini-Mauer aus Ziegelsteinen. Jeder Ziegelstein ist ein Kästchen breit und zwei Kästchen hoch. Wir wollen wissen, wieviele verschiedene Möglichkeiten es gibt, eine Mauer der Höhe 2 Kästchen und der Länge n Kästchen zu bauen. Hier sind zum Beispiel alle Möglichkeiten für n=1,2,3:

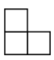


Wieviele Möglichkeiten gibt es für n=4 und n=5?
Vergleiche mit deinem Ergebnis aus 2.5.1 und beweise die Regelmäßigkeit, die dir auffällt!

3 Induktion am Beispiel eines geometrischen Problems

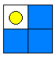
Bislang sah es vielleicht so aus, als sei die vollständige Induktion nur etwas für Aussagen aus der Zahlentheorie. Das ist nicht ganz falsch, aber es gibt viele Möglichkeiten, Fragen aus anderen Bereichen der Mathematik auf eine Aussage über natürliche Zahlen zu reduzieren. Das mag zunächst sehr theoretisch klingen, aber hier ist ein konkretes Beispiel.

Stellen wir uns vor, wir haben ein Brett von der Größe $2^n \times 2^n$ Felder. Für n können wir irgendeine natürliche Zahl einsetzen. Zum Beispiel wenn n = 5 ist, dann ist das Brett 32×32 Felder groß. Jetzt nehmen wir an, wir decken ein Feld mit einer Münze zu und versuchen die übrigen Felder mit Figuren abzudecken, die jeweils genau drei Kästchen um die Ecke abdecken:

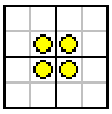


Diese Eckfiguren dürfen sich dabei nicht überlappen und alle Felder, außer das mit der Münze, müssen abgedeckt sein. Die Frage ist nun, für welche n das überhaupt möglich ist und ob es dabei eine Rolle spielt, wo wir die Münze hinpacken.

Möglicherweise hast du jetzt keine Ahnung, wo du anfangen sollst. In diesem Fall ist es oft eine gute Idee, ein konkretes n zu nehmen (ein möglichst einfaches!) und auszuprobieren. Wenn n=1 ist, haben wir es mit einem 2×2-Brett zu tun und die Sache ist klar: Decke ein Feld mit der Münze ab und decke die restlichen drei mit einer Eckfigur zu. Das ist natürlich immer möglich, egal auf welches Feld wir die Münze legen:



Die nächste natürliche Frage wäre: Was ist mit n=2, sprich mit einem 4×4-Brett? Nun ja, ein 4×4-Brett besteht im Grunde aus vier 2×2-Brettern und wir wissen bereits, wie wir jedes von diesen abdecken. Allerdings haben wir das Problem, dass wir für jedes 2×2-Brett eine Münze brauchen. Legen wir doch die vier Münzen in die mittleren vier Kästchen:



Jetzt können wir problemlos drei davon entfernen und mit einem Eckteil ersetzen! Das gibt uns die erwünschte Abdeckung! Bleibt noch die Frage: Ist es egal, wo wir die Münze liegen haben? Können wir sie auf jedes beliebige Feld legen und die restlichen mit den Eckfiguen abdecken? Natürlich! Wir können die Münze ganz offensichtlich auf jedes der mittleren vier Felder legen. Doch wir können auch jedes der vier 2×2-Bretter drehen und somit die Münze in jedes Eckfeld des 4×4-Bretts bekommen.

Spätestens jetzt sollte uns der Verdacht kommen, dass wann immer wir es schaffen, ein Feld der Größe $2^n \times 2^n$ auszulegen, wir auf dem Erreichten aufbauen können und ein Feld der Größe $2^{n+1} \times 2^{n+1}$ auslegen können.

Versuche, den Induktionsschritt zu finden und damit den induktiven Beweis zu vervollständigen!

4 Erweiterung unseres Repertoires - Eine ungewöhnliche Induktion

Mal angenommen, wir haben n reelle Zahlen, die wir $a_1, a_2, ..., a_n$ nennen. Das geometrische Mittel ist definiert als $\sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}$. Das arithmetische Mittel ist $\frac{a_1 + ... a_n}{n}$. Wir wollen beweisen, dass das arithmetische Mittel immer mindestens genauso groß ist wie das geometrische, also dass

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n} \leq \frac{a_1 + ... a_n}{n}$$

oder, was dasselbe ist

$$a_1 a_2 ... a_n \leq \left(\frac{a_1 + ... a_n}{n} \right)^n$$

unabhängig davon wie viele Zahlen wir haben und was für Zahlen das sind. (Probiere es ruhig mit x-beliebigen Zahlen aus!)

Es gibt dafür über 50 verschiedene Beweise, aber wir wollen uns einen besonders schönen induktiven Beweis anschauen, der gemeinhin Cauchy zugeschrieben wird, einem großen Mathematiker des 19. Jahrhunderts. Für uns ist er besonders interessant, weil er eine recht ungewöhnliche Induktion benutzt.

Sei P(n) die Aussage „$a_1 a_2 ... a_n \leq \left(\frac{a_1 + ... a_n}{n}\right)^n$ für beliebige n Zahlen".

Wir zeigen zunächst, dass P(2) gilt:
Für beliebige zwei Zahlen a_1 und a_2 wissen wir dass

$$\begin{aligned}
(a_1 - a_2)^2 \geq 0 &\Leftrightarrow \\
a_1^2 - 2a_1 a_2 + a_2^2 \geq 0 &\Leftrightarrow \\
a_1^2 + a_2^2 \geq 2a_1 a_2 &\Leftrightarrow \\
a_1^2 + 2a_1 a_2 + a_2^2 \geq 4a_1 a_2 &\Leftrightarrow \\
(a_1 + a_2)^2 \geq 4a_1 a_2 &\Leftrightarrow \\
\left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2 \geq a_1 a_2 &\Leftrightarrow \\
\frac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 a_2} &
\end{aligned}$$

Damit ist der Induktionsanfang fertig! Beachte, dass das der erste nichttriviale Induktionsanfang war, bei dem es tatsächlich etwas zu beweisen gab. Das nun folgende Prozedere mag etwas ungewöhnlich erscheinen, aber wenn man darüber nachdenkt, kann man sich davon überzeugen, dass es die Gültigkeit von P(n) für alle n beweist.
Wir werden in zwei Schritten vorgehen. Wir werden zeigen:
(A) aus P(n) folgt P(n-1) und
(B) aus P(n) und P(2) folgt P(2n).

Auf geht's:

(A) Seien $a_1, \ldots, a_{n-1}$ irgendwelche n-1 Zahlen. Wir definieren $A = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_k}{n-1}$.
Angenommen P(n) gilt. Was ist dann mit P(n-1)? Nun

$$(a_1 \times \ldots \times a_{n-1}) \times A \overset{P(n)}{\leq} \left(\frac{\sum_{k=1}^{n-1} a_k + A}{n}\right)^n = \left(\frac{(n-1)A + A}{n}\right)^n = A^n$$

und wenn wir auf beiden Seiten durch A dividieren, bekommen wir

$$a_1 \times \ldots \times a_{n-1} \leq A^{n-1} = \left(\frac{\sum_{k=1}^{n-1} a_k}{n-1}\right)^{n-1}$$

was genau die Aussage P(n-1) ist!

Nun also zu Schritt **(B)**, der etwas nachdenken erfordern wird:

$$\begin{aligned}
a_1 \times \ldots \times a_{2n} &= (a_1 \times \ldots \times a_n) \times (a_{n+1} \times \ldots \times a_{2n}) \overset{P(n)}{\leq} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{n}\right)^n \times \left(\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{a_k}{n}\right)^n \\
&= \left[\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{n}\right) \times \left(\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{a_k}{n}\right)\right]^n \\
&\overset{P(2)}{\leq} \left[\frac{\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{n}\right) + \left(\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{a_k}{n}\right)}{2}\right]^{2n} \\
&= \left(\frac{\sum_{k=1}^{2n} \frac{a_k}{n}}{2}\right)^{2n} = \left(\frac{\sum_{k=1}^{2n} a_k}{2n}\right)^{2n}
\end{aligned}$$

Nimm dir die Zeit, jeden Schritt nachzuvollziehen und sei nicht entmutigt, wenn es etwas länger dauert! Der Beweis benutzt nur elementare Umformungen und die Induktionsvoraussetzungen. Die Stellen, an denen in Schritt **(B)** P(2) und P(n) als Voraussetzungen benutzt werden, sind entsprechend markiert.