Beweistechniken
Vollständige Induktion

Alex Chmelnitzki

13. März 2005

1 Einführung: das Summenzeichen

Bevor wir mit der eigentlichen Beweistechnik loslegen, eine kleine Erläuterung zu einem Symbol, das wir häufig benutzen werden: es handelt sich um das Zeichen $\sum$, gesprochen „Sigma“. Man nennt es auch das Summenzeichen. Am einfachsten lässt sich das Summenzeichen anhand einiger Beispiele verstehen:
Angenommen wir wollen schreiben „Die Summe aller Ausdrücke der Form $n^2 + n$, wobei wir für n der Reihe nach alle natürlichen Zahlen zwischen 1 und 5 einsetzen“, also im Klartext

$$(1^2 + 1) + (2^2 + 2) + (3^2 + 3) + (4^2 + 4) + (5^2 + 5)$$

Das sieht lang und unhandlich aus. Zum Glück steht uns mit dem Summenzeichen ein einfaches Mittel zur Verfügung, solche Ausdrücke aufzuschreiben. Konkret sieht es so aus:

$$\sum_{i=1}^{5} i^2 + i$$

Das lesen wir folgendermaßen: „i durchläuft alle natürlichen Zahlen von 1 bis 5 und für jeden Durchlauf addieren wir $i^2 + i$ auf.“
Weiteres Beispiel: Die Summe aller Quadratzahlen von 3^2 bis 7^2 würden wir schreiben als $\sum_{i=3}^{7} i^2$, im Klartext also 9+16+25+36+49.
Als kleine Übung: Berechne $\displaystyle\sum_{k=2}^{9}(k+8)$?

Wenn das noch etwas unklar ist, keine Sorgen. Wir werden noch Gelegenheit haben, einige Übung mit dem Summenzeichen zu bekommen. Nun also, zum eigentlichen Thema!

2 Was ist die Vollständige Induktion?

2.1 Problembeschreibung

Gehen wir das Problem erst einmal ganz allgemein an. Mal angenommen A(n) ist eine Aussage über die Zahl n. Sie könnte zum Beispiel lauten „Die Summe aller natürlichen Zahlen von 1 bis n ist gleich $\frac{n(n+1)}{2}$“. Ferner angenommen, wir wollen beweisen, dass die Aussage A(n) für alle natürlichen Zahlen gilt.

Selbstverständlich wollen wir nicht alle Zahlen durchprobieren und für jede Zahl n die Aussage A(n) auf ihre Gültigkeit prüfen, da es unendlich viele natürliche Zahlen gibt.
Das ist eine Standardsituation, in der wir oft die Technik der so genannten vollständigen Induktion anwenden können.

2.2 Wie sieht diese Technik konkret aus?

Die Standard-Erscheinungsform der vollständigen Induktion ist folgende:

1. Zeige (beispielsweise durch direkte Berechnung), dass A(1) gilt. Das nennt man den Induktionsanfang.

2. Zeige, dass wenn die Aussage für irgendeine Zahl gilt, dass sie dann auch für die nächstfolgende Zahl gelten muss.
   In anderen Worten zeige, dass wenn die Aussage A(n) richtig ist, unweigerlich A(n+1) gelten muss, egal was n ist.
   Man nennt A(n) die Induktionsvoraussetzung und die daraus folgende Ableitung von A(n+1) ist der Induktionsschritt. Das ist das Herzstück des Beweises. Der Induktionsschritt muss allgemein gehalten sein und auf jede Zahl n anwendbar sein.

Um sich davon zu überzeugen, dass diese zwei Schritte die Aussage A(n) wirklich für alle Zahlen n beweisen, stellen wir uns vor, wir wollen wissen, ob A(10) eine korrekte Aussage ist. Wir haben in Schritt 1 „von Hand“ überprüft, dass A(1) eine korrekte Aussage ist. Schritt 2 sagt uns, dass wenn A(1) gilt, auch A(2) gelten muss. Doch der selbe Schritt sagt uns auch, dass wenn A(2) richtig ist, auch A(3) stimmen muss. Und so weiter, bis wir schließlich erhalten, dass A(9) stimmt und daher laut Schritt 2 auch A(10) stimmen muss.

Ein doofes Beispiel: Angenommen es regnet. Wenn wir nun meteorologisch beweisen könnten, dass nach jedem regnerischen Tag auch der nächste Tag regnerisch sein wird, wüssten wir, dass es von nun an *immer* regnen wird, ohne dass wir eine Ewigkeit warten müssten, um uns von dem „immer“ zu überzeugen.
Zum Glück kann man das nicht beweisen und es gibt stets einen Hoffnungsschimmer, dass morgen die Sonne scheinen könnte.

2.3 Kleines Beispiel

Eine Anekdote erzählt uns, dass als Karl Friedrich Gauss, wohl einer der größten Mathematiker aller Zeiten, ungefähr zehn Jahre alt war und seinem Mathelehrer in der Mathestunde gehörig auf den Senkel ging, dieser ihm zur Strafe eine Aufgabe gestellt hat: Karl Friedrich sollte alle Zahlen von 1 bis hundert aufsummieren. Natürlich ging der Lehrer davon aus, dass diese stupide Aufgabe den Bengel für den Rest der Stunde ruhig stellen sollte, jedoch meldete sich der pfiffige Schüler nach weniger als fünf Minuten wieder zu Wort und behauptete die Lösung zu haben.
Anstatt die Zahlen in ihrer natürlichen Reihenfolge zu summieren, addierte er zunächst 1 und 100, dann 2 und 99, 3 und 98 und so weiter bis 50+51. Wir sehen sofort, dass jedes dieser Paare in der Summe 101 ergibt und es insgesamt

50 Paare gibt. Somit erhielt Gauss $\sum_{i=1}^{100} i = 50 * 101 = 5050$
Allgemein erhalten wir mit Hilfe der selben Methode

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Schauen wir uns doch einmal an, wie wir dasselbe Ergebnis mit Hilfe der vollständigen Induktion bekommen!

2.4 Induktion in Aktion

Die zu beweisende Aussage A(n) lautet also, $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$. Wir wollen zeigen, dass diese Aussage für alle natürlichen Zahlen n zutrifft. Gehen wir also vor, wie oben beschrieben:

1. Zeige A(1). Das ist in diesem Fall sehr einfach: $\sum_{i=1}^{1} i = 1 = \frac{1 * (1+1)}{2}$.
2. Zeige dass aus A(n) automatisch A(n+1) folgt, in anderen Worten wenn $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$, dann folgt daraus $\sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$:

Angenommen A(n) ist wahr. Dann wissen wir also, dass

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Schauen wir uns doch einmal die Summe $\sum_{i=1}^{n+1} i$ an:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1} i &= \left(\sum_{i=1}^{n} i\right) + (n+1) \\
&\overset{nach\ Induktionsvoraussetzung}{=} \left(\frac{n(n+1)}{2}\right) + (n+1) \\
&= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2n+2}{2} \\
&= \frac{n^2+3n+2}{2} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)}{2}
\end{aligned}$$

Doch das ist genau die Aussage A(n+1)! Um das zu sehen, setze einfach in der Aussage A(n) n+1 für n ein. Das bedeutet, wann immer A(n) gilt, muss auch A(n+1) gelten. Doch wir wissen, dass A(1) gilt. Somit muss auch A(2) gelten. Aber dann gilt auch A(3) und so weiter. Das beweist, dass unsere Aussage tatsächlich für alle natürlichen Zahlen gilt!
Beachte, wie wir in unserem Induktionsschritt die Induktionsvoraussetzung benutzt haben, um die Summe von 1 bis n als Bruch umzuformen. Das ist ein typisches Merkmal der Induktion.

2.5 Die berühmte Frage nach dem Wozu

„Das ist alles schön und gut“, wirst du sagen, „aber wozu der Aufwand, um etwas zu zeigen, was der kleine Gauss schon mit zehn herausgefunden hat, ohne auch nur den blassesten Schimmer von Induktion zu haben“. In diesem Fall war die Induktion wirklich eine Kanone, mit der wir auf einen winzigen Spatzen geschossen haben. Doch hier kommt eine Aufgabe, mit der der kleine Gauss erheblich größere Schwierigkeiten gehabt hätte und für die die vollständige Induktion das natürlichste Mittel ist:
Zeige, dass die Summe der ersten n Quadratzahlen gleich $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ist! Wir nennen diese Aussage B(n) und wollen zeigen, dass sie für alle natürlichen Zahlen n gilt.

1. Wie sieht es mit B(1) aus?

$$\sum_{i=1}^{1} i^2 = 1 = \frac{1*(1+1)*(2*1+1)}{6}$$

   Passt!

2. Angenommen B(n) stimmt. Dann haben wir

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1} i^2 &= (\sum_{i=1}^{n} i^2) + (n+1)^2 \\
&\overset{nach\ Ind.voraussetzung}{=} (\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}) + (\frac{6n^2 +^1 2n + 6}{6}) \\
&= \frac{(2n^3+3n^2+n)+(6n^2+12n+6)}{6} \\
&= \frac{2n^3+9n^2+13n+6}{6} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}
\end{aligned}$$

   und somit folgt aus B(n), dass B(n+1) stimmt! Fertig ist der induktive Beweis!