K-Theorie für Operatoralgebren

Christian Voigt

Inhaltsverzeichnis

Einleitung und Übersicht 1

Kapitel 1. Grundlagen 3
1. Vektorbündel 3
2. Die Grothendieckgruppe und K^0 5
3. Projektive Moduln 7
4. Der Satz von Serre-Swan 9
5. Kategorien und Funktoren 11

Kapitel 2. K_0 für C^*-Algebren 15
1. Ein paar Vorbereitungen 15
2. Idempotente und Projektionen 16
3. Definition von K_0 22
4. Homotopieinvarianz 28
5. Halbexaktheit 28
6. Stetigkeit und Stabilität 31

Kapitel 3. K_1 für C^*-Algebren 39
1. Invertierbare und unitäre Elemente 39
2. Die Indexabbildung 40
3. Definition von K_1 42
4. Die Einhängung und höhere K-Theorie 43

Kapitel 4. Bott-Periodizität 47
1. Tensorprodukte und Nuklearität 47
2. Die Toeplitzalgebra 48
3. Bott-Periodizität 52
4. Einige Berechnungen 56

Literaturverzeichnis 57

Einleitung und Übersicht

K-Theorie ist ein zentrales Hilfsmittel für die Untersuchung der Struktur von C^*-Algebren mit Anwendungen in Algebra, harmonischer Analysis, Indextheorie und Topologie. In der Theorie der Operatoralgebren treten K-theoretische Methoden in einer Vielzahl von Fragestellungen auf, und einige dieser Fragestellungen führen direkt in die aktuelle Forschung.
Ursprünglich wurde K-Theorie von Grothendieck im Zusammenhang mit dem Satz von Riemann-Roch in der algebraischen Geometrie eingeführt [**5**]. Grothendieck wählte den Buchstaben K in der Bezeichnung als Abkürzung für das deutsche Wort „Klasse“. In der Tat werden die K-Gruppen konstruiert aus Klassen von algebraischen Vektorbündeln oder kohärenten Garben.
Etwas später entwickelten Atiyah und Hirzebruch die topologische K-Theorie [**2**], [**3**]. Hier werden die K-Gruppen aus Klassen von topologischen Vektorbündeln über kompakten Räumen gebildet. Die Theorie von Atiyah-Hirzebruch führte sehr schnell zu wichtigen geometrischen Anwendungen. Ein prominentes Beispiel hierfür ist die Lösung des Problems der Existenz von linear unabhängigen Vektorfeldern auf Sphären mithilfe von reeller K-Theorie durch Adams [**1**]. Als rein algebraische Anwendung erlaubt die topologische K-Theorie einen verhältnismässig einfachen und eleganten Beweis des Satzes von Bott und Milnor [**6**] über endliche Schiefkörpererweiterungen von $\mathbb{R}$.
Es wurde schnell klar, dass grundlegende Definitionen der K-Theorie in allgemeinerer Weise auch für Ringe sinnvoll sind. Allerdings gibt in diesem Rahmen mehrere verschiedene interessante Möglichkeiten höhere K-Gruppen zu definieren. Für allgemeine Ringe betrachtet man algebraische K-Theorie, deren Konstruktion durch homotopietheoretische Überlegungen motiviert ist. Um ein Analogon zur topologischen K-Theorie von Atiyah-Hirzebruch zu erhalten, benötigt man hingegen zusätzliche analytische Struktur. Einen natürlichen Rahmen hierfür bilden C^*-Algebren, oder etwas allgemeiner, Banachalgebren.
Das Ziel dier Vorlesung ist es die topologische K-Theorie für C^*-Algebren zu studieren. Grob gesprochen werden hierbei jeder C^*-Algebra A abelsche Gruppen $K_n(A)$ zugeordnet für $n \in \mathbb{Z}$, und die wichtigsten Eigenschaften dieser Konstruktion lassen sich folgendermaßen zusammenfassen:

a) *Funktorialität.* Jeder $*$-Homomorphismus $\phi : A \to B$ induziert einen Homomorphismus $\phi_* : K_n(A) \to K_n(B)$ für jedes n. Es gilt $\mathrm{id}_* = \mathrm{id}$ und
$$(\psi \circ \phi)_* = \psi_* \circ \phi_*$$
für $\phi : A \to B$ und $\psi : B \to C$.

b) *Homotopieinvarianz.* Sind $\phi, \psi : A \to B$ homotope $*$-Homomorphismen so gilt $\phi_* = \psi_*$.

c) *Stabilität.* Ist $\mathbb{K}(\mathcal{H})$ die Algebra der kompakten Operatoren auf einem separablen Hilbertraum $\mathcal{H}$, so gibt es natürliche Isomorphismen
$$K_n(A \otimes \mathbb{K}(\mathcal{H})) \cong K_n(A)$$
für alle n.

c) *Bott-Periodizität.* Es existiert ein natürlicher Isomorphismus $K_n(A) \cong K_{n+2}(A)$. Insbesondere erhält man im wesentlichen nur zwei K-Gruppen, nämlich $K_0(A)$ und $K_1(A)$.
d) *Ausschneidung.* Ist

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\iota} E \xrightarrow{\pi} Q \longrightarrow 0$$

eine exakte Sequenz von C^*-Algebren, so erhält man eine zugehörige exakte Sequenz

$$\begin{tikzcd} K_0(I) \arrow[r, "\iota_*"] & K_0(E) \arrow[r, "\pi_*"] & K_0(Q) \arrow[d] \\ K_1(Q) \arrow[u] & K_1(E) \arrow[l, "\pi_*"'] & K_1(I) \arrow[l, "\iota_*"'] \end{tikzcd}$$

von abelschen Gruppen.
d) *Korrespondenz.* Für die C^*-Algebra $C_0(X)$ der stetigen Funktionen auf einem lokal kompakten Raum X ist

$$K_n(C_0(X)) \cong K^n(X)$$

die topologische K-Theorie von X im Sinn von Atiyah-Hirzebruch.

Die Bott-Periodizität ist hierbei die zentrale Eigenschaft der topologischen K-Theorie. Sie ermöglicht in Verbindung mit Ausschneidung viele konkrete Berechnungen. Dies ist ein wesentlicher Unterschied zur algebraischen K-Theorie, wo es keine Periodizität gibt und Berechnungen im allgemeinen schwieriger sind.
Es gibt zahlreiche gute Lehrbücher über die K-Theorie von Operatoralgebren und ihre Anwendungen. Für den in dieser Vorlesung behandelten Themenkreis nützlich sind insbesondere [**8**], [**10**] und [**9**]. Für ein weiterführendes Studium empfiehlt sich das Buch von Blackadar [**4**].

KAPITEL 1

Grundlagen

In diesem Kapitel stellen wir grundlegende Begriffe und Definitionen der K-Theorie zusammen. Unter einem lokal kompakten Raum verstehen wir stets einen lokal kompakten Hausdorff-Raum, also einen Hausdorffraum, in dem jeder Punkt eine Umgebungsbasis aus kompakten Mengen besitzt.

1. Vektorbündel

In diesem Abschnitt besprechen wir grundlegende Eigenschaften von Vektorbündeln.

Definition 1.1. *Sei X ein topologischer Raum und $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Ein $\mathbb{K}$-Vektorbündel über X ist ein topologischer Raum E zusammen mit einer stetigen Abbildung $\pi : E \to X$, so dass gilt*

a) Für jeden Punkt $x \in X$ trägt die Faser $E_x = \pi^{-1}(x)$ die Struktur eines endlichdimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraums.

b) (Lokale Trivialität) Zu jedem $x \in X$ existiert eine offene Umgebung $U \subset X$, ein $n \in \mathbb{N}$ und ein Homöomorphismus $\phi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{K}^n$ so dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U) \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & U \times \mathbb{K}^n \arrow[dl] \\ & U & \end{tikzcd}$$

kommutativ ist und die induzierten Abbildungen $\phi_x : E_x \to \{x\} \times \mathbb{K}^n \cong \mathbb{K}^n$ Vektorraumisomorphismen sind für alle $x \in U$.

In dem Diagramm ist hierbei die Abbildung $U \times \mathbb{K}^n \to U$ die kanonische Projektion auf die erste Komponente. Eine Abbildung ϕ wie in b) nennt man eine Trivialisierung von E über U. Ein Vektorbündel $\pi : E \to X$ heißt trivial, wenn es eine Trivialisierung mit $U = X$ gibt. Insbesondere ist $X \times \mathbb{K}^n$ in offensichtlicher Weise ein triviales Vektorbündel über X. Wir schreiben oft statt $\pi : E \to X$ für ein $\mathbb{K}$-Vektorbündel lediglich E.
Aus der lokalen Trivialität folgt, dass die Dimension der Fasern E_x in einem Vektorbündel $\pi : E \to X$ lokal konstant ist. Allerdings muss sie nicht für alle Punkte aus X übereinstimmen. Ein Vektorbündel, dessen Fasern alle die feste Dimension n haben, nennt man ein Vektorbündel vom Rang n.
Wir betrachten einige Beispiele für Vektorbündel.

a) *(Möbiusband).* Sei E der Quotient von $[0,1] \times \mathbb{R}$ bezüglich der Identifikation $(0,t) \sim (1,-t)$. Die natürliche Projektion $[0,1] \times \mathbb{R} \to [0,1]$ induziert $\pi : E \to S^1$, und auf diese Weise wird E zu einem reellen Vektorbündel vom Rang 1. Ein Vektorbündel vom Rang 1 nennt man auch ein Geradenbündel.

b) *(Tangentialbündel von Sphären).* Das Tangentialbündel der Einheitssphäre

$$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} | ||x|| = 1\}$$

ist
$$TS^n = \{(x,v) \in S^n \times \mathbb{R}^{n+1} | x \perp v\}$$
mit der Projektionsabbildung $\pi : TS^n \to S^n, \pi(x,v) = x$.

c) *(Normalenbündel von S^n).* Das Normalenbündel von $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ist
$$NS^n = \{(x,v) \in S^n \times \mathbb{R}^{n+1} | v = \lambda x \text{ für ein } \lambda \in \mathbb{R}\}$$
mit der Projektionsabbildung $\pi : NS^n \to S^n, \pi(x,v) = x$.

Übungsaufgabe 1. *Gib lokale Trivialisierungen für diese Vektorbündel an.*

Ein Morphismus von Vektorbündeln über X ist ein stetige Abbildung $\psi : E_1 \to E_2$ so dass
$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[rr, "\psi"] \arrow[dr, "\pi_1"'] & & E_2 \arrow[dl, "\pi_2"] \\ & X & \end{tikzcd}$$
kommutiert und für alle $x \in X$ die induzierten Abbildungen $\psi_x : (E_1)_x \to (E_2)_x$ Vektorraum-Homomorphismen sind.
Ein Isomorphismus von Vektorbündeln über X ist ein invertierbarer Morphismus von Vektorbündeln. Man prüft leicht, dass der Morphismus $\psi : E_1 \to E_2$ ein Isomorphismus ist genau dann die faserweisen Abbildungen $\psi_x : (E_1)_x \to (E_2)_x$ Vektorraum-Isomorphismen sind.
Sei $\phi : X \to Y$ eine stetige Abbildung und $\pi : E \to Y$ ein Vektorbündel über Y. Dann ist
$$\phi^*(E) = X \times_Y E = \{(x,v) \in X \times E | \phi(x) = \pi(v)\}$$
ein Vektorbündel über X, genannt pullback. Nach Konstruktion hat man ein kommutatives Diagramm
$$\begin{tikzcd} \phi^*(E) \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[d, "\pi"] \\ X \arrow[r, "\phi"] & Y \end{tikzcd}$$
und für die Fasern von $\phi^*(E)$ gilt $\phi^*(E)_x = E_{\phi(x)}$.

Übungsaufgabe 2. *Prüfe nach, dass $\phi^*(E)$ ein Vektorbündel ist. Zeige hierfür zunächst, dass pullbacks von trivialen Vektorbündeln wieder triviale Vektorbündel sind.*

Sind $\pi_1 : E_1 \to X$ und $\pi_2 : E_2 \to X$ Vektorbündel über X, so ist die direkte Summe $E_1 \oplus E_2$ definiert durch
$$E_1 \oplus E_2 = \{(v_1, v_2) \in E_1 \times E_2 | \pi_1(v_1) = \pi_2(v_2)\}$$
mit der Projektionsabbildung $\pi : E_1 \oplus E_2 \to X, \pi(v_1, v_2) = \pi_1(v_1) = \pi_2(v_2)$.

Übungsaufgabe 3. *Zeige, dass die direkte Summe $E_1 \oplus E_2$ ein Vektorbündel über X ist mit Faser*
$$(E_1 \oplus E_2)_x = (E_1)_x \oplus (E_2)_x$$
für $x \in X$.

Betrachte das Tangentialbündel TS^n und das Normalenbündel NS^n aus Beispiel b) und c). Die direkte Summe $TS^n \oplus NS^n$ ist in kanonischer Weise isomorph zum trivialen Bündel über S^n vom Rang $n+1$.

ÜBUNGSAUFGABE 4. *Seien E_1, E_2, E_3 Vektorbündel über X. Zeige, dass es einen kanonischen Isomorphismus*

$$(E_1 \oplus E_2) \oplus E_3 \cong E_1 \oplus (E_2 \oplus E_3)$$

von Vektorbündeln gibt, und ebenso

$$E_1 \oplus E_2 \cong E_2 \oplus E_1.$$

ÜBUNGSAUFGABE 5. *Seien E_1, E_2 Vektorbündel über Y und $\phi : X \to Y$ stetig. Zeige, dass es einen kanonischen Isomorphismus*

$$\phi^*(E_1 \oplus E_2) \cong \phi^*(E_1) \oplus \phi^*(E_2)$$

von Vektorbündeln gibt.

Im folgenden interessieren wir uns in erster Linie für den Fall dass X ein kompakter Raum ist.

DEFINITION 1.2. *Sei X ein kompakter Raum. Wir bezeichnen die Menge aller Isomorphieklassen von $\mathbb{K}$-Vektorbündeln über X mit $V_{\mathbb{K}}(X)$.*

Es ist an dieser Stelle nicht offensichtlich, dass Isomorphieklassen von Vektorbündeln eine Menge bilden (und nicht nur eine Klasse). Wir werden das Argument hierfür etwas später angeben.
Mit der direkten Summe von Bündeln definiert $V_{\mathbb{K}}(X)$ ein abelsches Monoid. Das neutrale Element dieses Monoids ist gegeben durch das triviale Bündel $\mathrm{id} : X \to X$ vom Rang 0.
Jede stetige Abbildung $\phi : X \to Y$ induziert einen Monoid-Homomorphismus $\phi^* = V_{\mathbb{K}}(\phi) : V_{\mathbb{K}}(Y) \to V_{\mathbb{K}}(X)$ durch $V_{\mathbb{K}}(\phi)([E]) = [\phi^*(E)]$.

2. Die Grothendieckgruppe und K^0

Das im vorigen Abschnitt definierte Monoid $V_{\mathbb{K}}(X)$ bildet die Grundlage für die Definition der K-Gruppen von X. Wir benötigen zusätzlich eine Konstruktion von Grothendieck, die einem abelschen Monoid in natürlicher Weise eine abelsche Gruppe zuordnet.
Sei M ein abelsches Monoid. Auf der Menge $M \times M$ bildet die Relation

$$(m_1, n_1) \sim (m_2, n_2) \Leftrightarrow \text{es existiert } x \in M \text{ mit } m_1 + n_2 + x = m_2 + n_1 + x$$

eine Äquivalenzrelation. Hierbei sind Symmetrie und Reflexivität offensichtlich. Gilt $(m_1, n_1) \sim (m_2, n_2)$ und $(m_2, n_2) \sim (m_3, n_3)$ so finden wir $x, y \in M$ mit

$$m_1 + n_2 + x = m_2 + n_1 + x, \qquad m_2 + n_3 + y = m_3 + n_2 + y.$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned} m_1 + n_3 + (x + y + m_2) &= m_1 + x + (m_2 + n_3 + y) \\ &= m_1 + x + (m_3 + n_2 + y) \\ &= (m_1 + n_2 + x) + m_3 + y \\ &= (m_2 + n_1 + x) + m_3 + y \\ &= n_1 + m_3 + (x + y + m_2), \end{aligned}$$

und somit $(m_1, n_1) \sim (m_3, n_3)$. Dies zeigt die Transitivität von $\sim$.
Die Paare (m, n) sollte man sich als formale Differenzen $m - n$ vorstellen, dieses Bild erklärt gewissermassen die Definition der Relation $\sim$.
Durch die kompentenweise Addition wird

$$G(M) = (M \times M)/\sim,$$

ein abelsches Monoid. Hierfür muss man nachweisen, dass die Addition nicht von der Wahl der Repräsentanten abhängt. Ist $(m_1, n_1) \sim (m_1', n_1')$ und $(m_2, n_2) \sim (m_2', n_2')$, wobei

$$m_1 + n_1' + x = m_1' + n_1 + x, \qquad m_2 + n_2' + y = m_2' + n_2 + y,$$

so gilt in der Tat

$$\begin{aligned}(m_1, n_1) + (m_2, n_2) &= (m_1 + m_2, n_1 + n_2) \\ &\sim (m_1 + m_1' + x + m_2 + m_2' + y, n_1 + m_1' + x + n_2 + m_2' + y) \\ &= (m_1 + m_1' + x + m_2 + m_2' + y, n_1' + m_1 + x + n_2' + m_2 + y) \\ &\sim (m_1' + m_2', n_1' + n_2')\end{aligned}$$

in $M \times M$.
Ausserdem besitzt sogar jedes Element (m, n) in $G(M)$ ein Inverses, denn es gilt $(m, n) + (n, m) \sim (0, 0)$ für alle $m, n \in M$. Also ist $G(M)$ eine abelsche Gruppe.

Definition 1.3. *Für ein abelsches Monoid M heißt $G(M)$ die Grothendieckgruppe von M.*

Ist $\phi : M \to N$ ein Monoid-Homomorphismus, so erhalten wir einen Gruppenhomomorphismus $G(\phi) : G(M) \to G(N)$ durch $G(\phi)(m, n) = (\phi(m), \phi(n))$.
Offenbar ist $\iota : M \to G(M), \iota(m) = (m, 0)$ ein Monoid-Homomorphismus. Zusammen mit ι erfüllt $G(M)$ die folgende universelle Eigenschaft.

Proposition 1.4. *Sei M ein abelsches Monoid und N eine abelsche Gruppe. Ist $f : M \to N$ ein Monoid-Homomorphismus, so gibt es genau einen Gruppenhomomorphismus $F : G(M) \to N$, so dass*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "\iota"] \arrow[dr, "f"'] & & G(M) \arrow[dl, "F"] \\ & N & \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Beweis. Man prüft nach, dass durch die Formel $F(m, n) = f(m) - f(n)$ ein Gruppenhomomorphismus $F : G(M) \to N$ definiert wird. Offenbar gilt dann $F\iota(m) = F(m, 0) = f(m)$ für alle $m \in M$, also $F\iota = f$. Sei nun F' irgendein Gruppenhomomorphismus mit $F'\iota = f$. Dann gilt $F'(m, 0) = f(m)$ und somit auch

$$F'(m, n) = F'((m, 0) - (n, 0)) = F(m, 0) - F(n, 0) = f(m) - f(n) = F(m, n)$$

für alle $m, n \in M$. Also ist F eindeutig bestimmt. □

Übungsaufgabe 6. *Für das Monoid $\mathbb{N}$ erhalten wir $G(\mathbb{N}) = \mathbb{Z}$.*

Definition 1.5 (Atiyah-Hirzebruch). *Sei X ein kompakter Raum und $V_{\mathbb{K}}(X)$ das Monoid der Isomorphieklassen von $\mathbb{K}$-Vektorbündeln über X für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Die Gruppen*

$$K^0_{\mathbb{R}}(X) = G(V_{\mathbb{R}}(X)), \qquad K^0_{\mathbb{C}}(X) = G(V_{\mathbb{C}}(X))$$

heißen die relle bzw. die komplexe K-Theorie von X.

Ist $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung zwischen kompakten Räumen, so erhalten wir einen induzierten Gruppenhomomorphismen $K^0_{\mathbb{K}}(f) : K^0_{\mathbb{K}}(Y) \to K^0_{\mathbb{K}}(X)$ in der K-Theorie.

Übungsaufgabe 7. *Sei $\star$ ein einpunktiger Raum. Dann gilt $K^0_{\mathbb{K}}(\star) = \mathbb{Z}$ für $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$.*

Zwei $\mathbb{K}$-Vektorbündel E_1 und E_2 über X definieren die gleiche Klasse in $K^0_{\mathbb{K}}(X)$ genau dann wenn

$$E_1 \oplus F \cong E_2 \oplus F$$

für ein Vektorbündel F. In diesem Fall nennt man E_1 und E_2 stabil isomorph.
Betrachte die Sphäre $S^n \subset \mathbb{R}^n$ und die oben eingeführten Bündel TS^n und NS^n. Ist n gerade, so ist TS^n nichttrival. Dies kann man mithilfe der Eulercharakteristik zeigen, im Fall $n = 2$ ist dies der berühmte Satz vom Igel. Allerdings ist stets $TS^n \oplus NS^n$ das das triviale Bündel vom Rang $n+1$. Insbesondere ist TS^n stabil isomorph zum trivialen Bündel vom Rang n. Für gerades n erhalten wir also Beispiele für stabil isomorphe Vektorbündel, die nicht isomorph sind.
Wir werden uns im folgenden nur mit der komplexen K-Theorie beschäftigen und schreiben daher

$$K^0(X) = K^0_{\mathbb{C}}(X)$$

für die komplexe K-Theorie von X.

3. Projektive Moduln

In diesem Abschnitt geben wir die Definition von projektiven Moduln über Ringen. Unter einem Ring verstehen wir einen assoziativen Ring mit 1. Beispiele für Ringe sind $\mathbb{Z}$ und alle unitalen C^*-Algebren.
Im folgenden sei stets R ein fest gewählter Ring. Wir betrachten R-Linksmoduln, und Homomorphismen sind stets R-Modul-Homomorphismen.

Definition 1.6. *Sei I eine Indexmenge. Ein Modul F zusammen mit einer Abbildung $\iota : I \to F$ heißt frei über I, wenn es für jeden Modul M und jede Abbildung $h : I \to M$ genau ein Homomorphismus $H : F \to M$ existiert, so dass*

$$\begin{tikzcd} I \arrow[rr, "\iota"] \arrow[dr, "h"'] & & F \arrow[dl, "H"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

kommutativ ist.

Aus der Definition folgt, dass F eindeutig bestimmt ist bis auf Isomorphie. Ist F ein freier Modul über I, so ist F isomorph zu

$$R^{(I)} = \bigoplus_{i \in I} R = \left\{ (r_i)_{i\in I} \in \prod_{i \in I} R | r_i \neq 0 \text{ nur für endlich viele } i \right\}.$$

Insbesondere ist $M = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ für $n > 1$ Beispiel für einen Modul über $R = \mathbb{Z}$, der nicht frei ist.

Definition 1.7. *Ein Modul P heißt projektiv wenn es für jeden surjektiven Homomorphismus $\pi : M \to N$ und jeden Homomorphismus $f : P \to N$ einen Homomorphismus $F : P \to M$ gibt, so dass*

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "F"'] \arrow[d, "f"] \\ M \arrow[r, "\pi"] & N \end{tikzcd}$$

kommutativ ist.

Man beachte hierbei, dass F nicht eindeutig zu sein braucht.
Offenbar ist R, aufgefasst als Modul über sich selbst, projektiv. Hierfür genügt

es, ein Urbild $x \in M$ von $f(1)$ zu wählen und F zu definieren durch $F(r) = rx$. Allgemeiner ist jeder freie Modul

$$R^{(I)} = \bigoplus_{i \in I} R$$

für eine beliebige Indexmenge I projektiv. Hier muss man in ähnlicher Weise die Basisvektoren geeignet liften.

Satz 1.8. *Die folgenden Aussagen sind für einen Modul P äquivalent.*

a) P ist projektiv.
b) Jeder Epimorphismus $\pi : M \to P$ zerfällt. Genauer, es gibt für jeden Modul M und jeden Epimorphismus $\pi : M \to P$ einen Homomorphismus $\iota : P \to M$ mit $\pi\iota = \mathrm{id}$.
c) P ist direkter Summand eines freien Moduls.

Beweis. *a)* $\Rightarrow$ *b)* folgt aus der Definition für

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "\sigma"'] \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\ M \arrow[r, "\pi"] & P \end{tikzcd}$$

b) $\Rightarrow$ *c)* Jeder Modul ist Quotient eines freien Moduls. Wählt man einen Epimorphismus $\pi : F \to P$ mit F frei, so existiert nach *b)* ein Homomorphismus $\sigma : P \to F$ mit $\pi\sigma = \mathrm{id}$. Setzen wir $M = \ker(\pi)$ so erhalten wir $P \oplus M \cong F$ durch die Abbildung $\gamma : F \to P \oplus M, \gamma(x) = (\pi(x), x - \sigma\pi(x))$.
c) $\Rightarrow$ *a)* Es seien $s : P \to F$ und $p : F \to P$ Homomorphismen mit $ps = \mathrm{id}$ wobei F ein freier Modul sei. Sei weiter $\pi : M \to N$ ein surjektiver Homomorphismus und $g : P \to N$ ein Homomorphismus. Dann liefert $gp : F \to N$ einen Homomorphismus. Nach unseren obigen Überlegungen ist F projektiv, also gibt es eine Liftung $G' : F \to M$ mit $\pi G' = gp$. Dann erfüllt $G = G's$ die Bedingung $\pi G = gps = g$. Also ist P projektiv. □

Ein Modulhomomorphismus $\phi : R^m \to R^n$ ist eindeutig bestimmt durch die Bilder $\phi(e_j)$ der Einheitsvektoren e_j für $j = 1, \dots, m$. Schreiben wir jedes $\phi(e_j)$ als Zeilenvektor in R^n, so erhalten wir einer $m \times n$-Matrix

$$M_\phi = \begin{pmatrix} \phi(e_1) \\ \vdots \\ \phi(e_m) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_{11} & \cdots & \phi_{1n} \\ \vdots & & \\ \phi_{m1} & \cdots & \phi_{mn} \end{pmatrix}.$$

Damit können wir ϕ mit der Matrixmultiplikation

$$\phi(v) = v \cdot M_\phi$$

identifizieren. Beachte, dass M_ϕ von rechts multipliziert wird, da wir R-Links-Moduln betrachten. Ist $\psi : R^n \to R^q$ ein weiterer Homomorphismus so erhalten wir ausserdem $M_{\psi\phi} = M_\psi M_\phi$. Anders ausgedrückt gilt

$$\mathrm{Hom}_R(R^m, R^n) \cong M_{m,n}(R)$$

in natürlicher Weise.
Ein Element $e \in R$ heißt Idempotent, wenn $e^2 = e$ gilt. Ein Modul heißt endlich erzeugt wenn es einen Epimorphismus $\pi : R^n \to M$ gibt für ein n.

Satz 1.9. *Die folgenden Aussagen sind für einen Modul P äquivalent.*

a) P ist endlich erzeugt projektiv, also endlich erzeugt und projektiv.
b) P ist direkter Summand von R^n für ein n.
c) Es gibt ein Idempotent $e \in M_n(R)$ so dass $P \cong R^n e$.

Beweis. $a) \Leftrightarrow b)$ folgt wie im Beweis von Satz 1.8. $b) \Leftrightarrow c)$ Ganz allgemein gibt es für Moduln U, V und W eine Zerlegung $U \cong V \oplus W$ genau dann wenn es Homomorphismen $\pi_V : U \to V, \pi_W : U \to W$ sowie $\iota_V : V \to U, \iota_W : W \to U$ gibt mit

$$\pi_V \iota_V = \mathrm{id}_V , \qquad \pi_W \iota_W = \mathrm{id}_W , \qquad \iota_V \pi_V + \iota_W \pi_W = \mathrm{id}_U .$$

Sei P direkter Summand von R^n. Dann gibt es eine direkte Summenzerlegung $R^n \cong P \oplus M$, also Homomorphismen $\pi_P : R^n \to P, \pi_M : R^n \to M$ sowie $\iota_P : P \to R^n, \iota_M : M \to R^n$ mit

$$\pi_P \iota_P = \mathrm{id}_P , \qquad \pi_M \iota_M = \mathrm{id}_M , \qquad \iota_P \pi_P + \iota_M \pi_M = \mathrm{id}_M .$$

Hierbei entspricht das gesuchte Idempotent $e \in M_n(R)$ dem Element $\iota_P \pi_P \in \mathrm{Hom}(R^n, R^n) \cong M_n(R)$. Umgekehrt erhält man für $P \cong R^n e$ eine direkte Summenzerlegung

$$R^n \cong P \oplus M \cong R^n e \oplus R^n (1 - e)$$

mit den offensichtlichen Inklusionen ι_P und ι_M und den Projektionsabbildungen $\pi_P : R^n \to R^n e, \pi_P(v) = ve$, $\pi_M : R^n \to R^n(1 - e), \pi_M(v) = v(1 - e)$. □

4. Der Satz von Serre-Swan

In diesem Abschnitt erklären wir die Beziehung zwischen Vektorbündeln und projektiven Moduln. Der Einfachheit halber betrachten wir nur komplexe Vektorbündel, alle Aussagen gelten aber auch analog für reelle Vektorbündel und reelle C^*-Algebren.

Definition 1.10. *Sei $\pi : E \to X$ ein Vektorbündel. Ein Schnitt von E ist eine stetige Abbildung $\sigma : X \to E$ mit $\pi\sigma = \mathrm{id}$. Wir schreiben $\Gamma(E)$ oder $\Gamma(X; E)$ für die Menge aller Schnitte von E.*

Die Menge $\Gamma(E)$ der Schnitte von E wird ein $C(X)$-Modul durch

$$(\sigma_1 + \sigma_2)(x) = \sigma_1(x) + \sigma_2(x), \qquad (f\sigma)(x) = f(x)\sigma(x)$$

für alle $\sigma, \sigma_1, \sigma_2 \in \Gamma(E)$ und $f \in C(X)$. Ist $E = X \times \mathbb{C}^n$ trivial vom Rang n, so gilt offenbar $\Gamma(X, E) \cong C(X)^n$.
Im folgenden schreiben wir $E_{|U}$ für die Einschränkung eines Vektorbündels $\pi : E \to$ auf die Teilmenge $U \subset X$. Formal ist $E_{|U} = \iota_U^*(E)$ wobei $\iota_U : U \to X$ die Inklusionsabbildung bezeichnet.

Satz 1.11 (Serre-Swan). *Sei X ein kompakter Raum.*

a) Ist $\pi : E \to X$ ein Vektorbündel so ist $\Gamma(X; E)$ ein endlich erzeugt projektiver $C(X)$-Modul.
b) Jeder endlich erzeugt projektive $C(X)$-Modul ist isomorph zu $\Gamma(X; E)$ für ein bis auf Isomorphie eindeutig bestimmtes Vektorbündel $\pi : E \to X$.

Beweis. $a)$ Sei $\pi : E \to X$ ein Vektorbündel. Da X kompakt ist, finden wir eine endliche offene Überdeckung $X = U_1 \cup \cdots \cup U_k$ so dass $E_{|U_j}$ trivial ist, also

$$E_{|U_j} \cong U_j \times \mathbb{C}^{n_j} .$$

Dies induziert einen Modul-Isomorphismus

$$\Psi_j : \Gamma(E_{|U_j}) \to C(U_j)^{n_j}$$

für alle j. Beachte hier, dass U_j im allgemeinen nicht kompakt ist, also $C(U_j)$ keine C^*-Algebra.

Sei nun $(\chi_j)_{j=1,\dots,k}$ eine zu U_j untergeordnete Zerlegung der Eins. Genauer, wir wählen stetige Funktionen $\phi_j : X \to [0,1]$ mit $\operatorname{supp}(\chi_j) \subset U_j$ für alle j und

$$\sum_{i=1}^{k} \chi_i(x)^2 = 1.$$

Mit $n = n_1 + \cdots + n_k$ definieren wir einen Homomorphismus $\pi : C(X)^n = \bigoplus_{j=1}^{k} C(X)^{n_j} \to \Gamma(E)$ durch

$$\pi(f_1, \dots, f_k) = \sum_{j=1}^{k} \Psi_j^{-1}(\chi_j f_j)$$

wobei wir $\chi_j f_j$ als Element von $C(U_j)^{n_j}$ auffassen und $\Psi_j^{-1}(\chi_j f_j)$ durch Null auf ganz X fortgesetzt wird. Wegen $\operatorname{supp}(\chi_j) \subset U_j$ liefert dies in der Tat einen stetigen Schnitt von E.
Weiter sei $\iota : \Gamma(E) \to C(X)^n$ der Homomorphismus definiert durch

$$\iota(\sigma) = \bigoplus_{j=1}^{k} \Psi_j(\chi_j \sigma),$$

wobei wir σ entsprechend als Element von $\Gamma(E_{|U_j})$ auffassen, und $\Psi_j(\chi_j\sigma) \in C(U_j)^{n_j}$ wieder durch Null zu einem Element in $C(X)^{n_j} \subset C(X)^n$ fortsetzen. Dann gilt

$$\begin{aligned}\pi\iota(\sigma)(x) &= \pi(\Psi_1(\chi_1\sigma), \dots, \Psi_k(\chi_k\sigma)) \\ &= \sum_{j=1}^{k} \Psi_j^{-1}\chi_j\Psi_j(\chi_j\sigma) = \sum_{j=1}^{k} \Psi_j^{-1}\Psi_j(\chi_j^2\sigma) = \sum_{j=1}^{k} \chi_j^2\sigma = \sigma,\end{aligned}$$

und nach Satz 1.9 folgt die Aussage.
$b)$ Sei P ein endlich erzeugt projektiver $C(X)$-Modul. Nach Satz 1.9 gilt $P \cong C(X)^n e$ für ein Idempotent $e \in M_n(C(X)) = C(X, M_n(\mathbb{C}))$. Wir definieren $E_x = \mathbb{C}^n e(x) \subset \mathbb{C}^n$, wobei wir e als Funktion $e : X \to M_n(\mathbb{C})$ auffassen. Weiter sei

$$E = \bigcup_{x \in X} E_x \subset X \times \mathbb{C}^n,$$

versehen mit der Teilraumtopologie von $X \times \mathbb{C}^n$. Offenbar schränkt sich die kanonische Projektion $X \times \mathbb{C}^n \to X$ zu einer stetigen Abbildung $\pi : E \to X$ ein, und die Faser von π über x ist genau E_x.
Zu zeigen ist, dass das Bündel E lokal trivial ist. Für festes $x \in X$ betrachte nun die stetige Funktion $u : X \to \operatorname{End}(E_x)$ gegeben durch

$$u(y)(v) = ve(y)e(x)$$

wobei wir $v \in E_x \subset \mathbb{C}^n$ beachten und $e(y) \in M_n(\mathbb{C})$ für alle $y \in X$. Es gilt $u(x) = \mathrm{id}$, und da $\operatorname{End}(E_x)$ eine Banachalgebra ist und u stetig finden wir eine offene Umgebung U von x so dass $u(y)$ invertierbar ist für alle $y \in U$.
Wir erhalten eine lineare Abbildung $T(y) : E_x \to E_y$ durch $T(y)(v) = ve(y)$, und wegen $ve(y)e(x) = v$ ist $T(y)$ injektiv. Wählt man U hinreichend klein, so ist die Abbildung T auch surjektiv für alle $y \in U$. Betrachte hierzu die Abbildung $rang : \operatorname{Idem}(M_n(\mathbb{C})) \to \mathbb{Z}$, die einer idempotenten Matrix ihren Rang zuordnet. Diese Funktion ist stetig, also lokal konstant. Wir können also ohne Einschränkung annehmen dass $\dim(E_y) = \dim(E_x) = k$ für alle $y \in U$ gilt. Also ist $T(y)$ ein Isomorphismus. Wir erhalten nun eine lokale Trivialisierung $\phi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{C}^k$ durch

$$\phi^{-1}(y, v) = T(y)(v).$$

Also ist $\pi : E \to X$ ein Vektorbündel, und nach Konstruktion ist die kanonische Abbildung $\gamma : P \to \Gamma(E), \gamma(\sigma)(x) = \sigma(x)$ ein Isomorphismus.
Um zu zeigen, dass das auf diese Weise konstruierte Vektorbündel bis auf Isomorphie eindeutig ist zeigen wir, dass ein Modulisomorphismus $\phi : \Gamma(E) \to \Gamma(F)$ stets durch einen eindeutig bestimmten Vektorbündelisomorphismus $V_\phi : E \to F$ induziert ist durch $\phi(\sigma)(x) = V_\phi(\sigma(x))$. Beachte zunächst, dass $E_x \cong \Gamma(E)/I_x\Gamma(E)$ für $x \in X$ gilt, wobei $I_x \subset C(X)$ das Ideal

$$I_x = \{f \in C(X) | f(x) = 0\}$$

bezeichnet und $I_x\Gamma(E) \subset \Gamma(E)$ den zugehörigen Untermodul. Insbesondere induziert ϕ einen eindeutigen Vektorraumisomorphismus $\phi_x : E_x \to F_x$. Diese Isomorphismen liefern eine eindeutig bestimmte Abbildung $V_\phi : E \to F$ der Totalräume mit $\phi(\sigma)(x) = V_\phi(\sigma(x))$.
Sei $A \subset X$ eine abgeschlossene Teilmenge. Wie oben erhält man induzierte $C(A)$-Modulhomomorphismen $\phi_A : \Gamma(E_{|A}) \to \Gamma(F_{|A})$. Wählt man A, so dass $E_{|A}$ und $F_{|A}$ trivial vom Rang k sind, so gilt

$$\mathrm{Hom}_{C(A)}(\Gamma(E_{|A}), \Gamma(F_{|A})) \cong M_k(C(A)).$$

Hieraus folgt leicht, dass V_ϕ stetig ist. Dies liefert die Behauptung. □

5. Kategorien und Funktoren

In diesem Abschnitt erklären wir die grundlegenden Begriffe aus der Sprache der Kategorien und Funktoren. Anschliessend formulieren wir einige der obigen Konstruktionen und Resultate mithilfe dieser Begriffe neu.

Definition 1.12. *Eine Kategorie $\mathcal{C}$ besteht aus*

a) *einer Klasse* $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ *(Objekte von $\mathcal{C}$)*
b) *Mengen* $\mathrm{Mor}_\mathcal{C}(X,Y)$ *für alle $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ (Morphismen von X nach Y)*
c) *Verknüpfungsabbildungen*

$$\mathrm{Mor}_\mathcal{C}(X,Y) \times \mathrm{Mor}_\mathcal{C}(Y,Z) \to \mathrm{Mor}_\mathcal{C}(X,Z), \qquad (f,g) \mapsto g \circ f = gf$$

für alle $X, Y, Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$

so dass gilt

a) *(Assoziativität) Für alle Objekte $W, X, Y, Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ und $f \in \mathrm{Mor}_\mathcal{C}(W,X), g \in \mathrm{Mor}_\mathcal{C}(X,Y), h \in \mathrm{Mor}_\mathcal{C}(Y,Z)$ gilt*

$$h(gf) = (hg)f$$

b) *(Identität) Für jedes $Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ existiert $1_Y \in \mathrm{Mor}_\mathcal{C}(Y,Y)$ so dass*

$$1_Y f = f, \qquad g 1_Y = g$$

für alle $f \in \mathrm{Mor}_\mathcal{C}(X,Y)$, $g \in \mathrm{Mor}_\mathcal{C}(Y,Z)$ und $X, Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$.

Für $f \in \mathrm{Mor}_\mathcal{C}(X,Y)$ schreibt man auch $f : X \to Y$ oder

$$X \xrightarrow{f} Y$$

Statt $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ schreibt man auch $X \in \mathcal{C}$. Analog ist $f \in \mathcal{C}$ eine Kurzschreibweise für $f \in \mathrm{Mor}_\mathcal{C}(X,Y)$. Ein Isomorphismus in $\mathcal{C}$ ist ein Morphismus $f : X \to Y$ für den es einen Morphismus $g : Y \to X$ gibt mit $fg = 1$ und $gf = 1$.
Wir geben einige Beispiele für Kategorien.

a) *Die Kategorie Me der Mengen.* Die Objekte in Me sind Mengen, und die Morphismen sind die Abbildungen zwischen Mengen. Die Isomorphismen sind genau die Bijektionen.

b) *Die Kategorie Gr der Gruppen.* Die Objekte in *Gr* sind Gruppen, und die Morphismen sind die Gruppenhomomorhpismen.
c) *Die Kategorie Ab der abelschen Gruppen.* Die Objekte in *Ab* sind abelsche Gruppen, und die Morphismen sind die Gruppenhomomorphismen.
d) *Die Kategorie Top der topologischen Räume.* Die Objekte in *Top* sind topologische Räume, und die Morphismen sind die stetigen Abbildungen.
e) *Die Kategorie Cpt der kompakten Räume.* Die Objekte in *Cpt* sind kompakte Hausdorffräume, und die Morphismen sind die stetigen Abbildungen.
f) *Die Kategorie* C^*-Alg *der* C^**-Algebren.* Die Objekte in C^*-Alg sind C^*-Algebren, und die Morphismen sind die $*$-Homomorphismen.
g) Sei G eine Gruppe. Dann erhält man eine Kategorie $\underline{G}$ mit $\mathrm{Ob}(\underline{G}) = \{\star\}$ und $\mathrm{Mor}_{\underline{G}}(\star, \star) = G$ mit Verknüpfung durch Gruppenmultiplikation.

Eine Kategorie $\mathcal{C}$ heißt klein, wenn $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ eine Menge ist. Die Kategorie in Beispiel g) ist klein, während die Kategorien in den Beispielen a) - f) nicht klein sind.

Definition 1.13. *Seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ Kategorien. Ein kovarianter Funktor $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ besteht aus*

a) einer Abbildung $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \ni X \mapsto \mathcal{F}(X) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$
b) einer Familie von Abbildungen

$$\mathcal{F}_{X,Y} : \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X,Y) \ni f \mapsto \mathcal{F}_{X,Y}(f) \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(X), \mathcal{F}(Y))$$

für alle $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$

so dass gilt

a) $\mathcal{F}_{X,Z}(gf) = \mathcal{F}_{Y,Z}(g)\mathcal{F}_{X,Y}(f)$ *für alle* $X, Y, Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ *und* $f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X,Y), g \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(Y,Z)$
b) $\mathcal{F}_{X,X}(1_X) = 1_{\mathcal{F}(X)}$ *für alle* $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$.

Analog erhält man den Begriff des kontravarianten Funktors durch „Umdrehen der Pfeile“.

Definition 1.14. *Seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ Kategorien. Ein kontravarianter Funktor $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ besteht aus*

a) einer Abbildung $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \ni X \mapsto \mathcal{F}(X) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$
b) einer Familie von Abbildungen

$$\mathcal{F}_{X,Y} : \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X,Y) \ni f \mapsto \mathcal{F}_{X,Y}(f) \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(Y), \mathcal{F}(X))$$

für alle $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$

so dass gilt

a) $\mathcal{F}_{X,Z}(gf) = \mathcal{F}_{X,Y}(f)\mathcal{F}_{Y,Z}(g)$ *für alle* $X, Y, Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ *und* $f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X,Y), g \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(Y,Z)$
b) $\mathcal{F}_{X,X}(1_X) = 1_{\mathcal{F}(X)}$ *für alle* $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$.

In der Praxis vereinfacht man meist die Notation und schreibt $\mathcal{F}(f)$ statt $\mathcal{F}_{X,Y}(f)$ für einen Morphismus $f : X \to Y$ in $\mathcal{C}$. Kovariante Funktoren nennt man oft auch kurz Funktoren.
Mit den obigen Definition können wir nun die grundlegenden Eigenschaften der topologischen K-Theorie folgendermassen beschreiben.

Satz 1.15. *Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Die topologische K-Theorie $K^0_{\mathbb{K}}$ ist ein (kontravarianter) Funktor von der Kategorie der kompakten Hausdorffräume in die Kategorie der abelschen Gruppen.*

Die ursprüngliche Motivation für die Einführung von Kategorien und Funktoren der Wunsch, den Begriff der „Natürlichkeit“ von gewissen Konstruktionen präzise zu fassen. Zentral ist dabei der Begriff einer natürlichen Transformation.

Definition 1.16. *Seien $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ und $\mathcal{G} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ Funktoren. Eine natürliche Transformation $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ist eine Familie $(\phi_X)_{X \in \mathcal{C}}$ von Morphismen $\phi_X : \mathcal{F}(X) \to \mathcal{G}(X)$, so dass für alle $f : X \to Y$ in $\mathcal{C}$ das Diagramm*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(X) \arrow[r, "\phi_X"] \arrow[d, "\mathcal{F}(f)"] & \mathcal{G}(X) \arrow[d, "\mathcal{G}(f)"] \\ \mathcal{F}(Y) \arrow[r, "\phi_Y"] & \mathcal{G}(Y) \end{tikzcd}$$

kommutativ ist.

Ein natürlicher Isomorphismus ist eine natürliche Transformation $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ so dass ϕ_X ein Isomorphismus ist für alle $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$. Wir schreiben $\mathcal{F} \sim \mathcal{G}$ wenn es einen natürlichen Isomorphismus zwischen den Funktoren $\mathcal{F}, \mathcal{G} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ gibt.
Eine Äquivalenz von Kategorien ist ein Funktor $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ so dass ein Funktor $\mathcal{G} : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ existiert mit $\mathcal{F}\mathcal{G} \sim \mathrm{id}$ und $\mathcal{G}\mathcal{F} \sim \mathrm{id}$.
Es ist oft nützlich, eine etwas andere Beschreibung von Kategorienäquivalenzen zu verwenden. Um dies zu erklären benötigen wir weitere Begriffe. Ein Funktor $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ heißt treu, wenn $\mathcal{F} : \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X,Y) \to \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(X), \mathcal{F}(Y))$ injektiv ist für alle $X, Y \in \mathcal{C}$. Analog heißt $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ voll, wenn $\mathcal{F} : \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X,Y) \to \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(X), \mathcal{F}(Y))$ surjektiv ist für alle X, Y. Ist $\mathcal{F}$ voll und treu, so sagt man auch $\mathcal{F}$ sei voll treu. Schließlich heißt $\mathcal{F}$ wesentlich surjektiv, wenn es für jedes Objekt $Z \in \mathcal{D}$ ein Objekt $X \in \mathcal{C}$ gibt mit $\mathcal{F}(X) \cong Z$.

Proposition 1.17. *Ein Funktor $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ist genau dann eine Äquivalenz, wenn $\mathcal{F}$ voll treu und wesentlich surjektiv ist.*

Beweis. Angenommen $\mathcal{F}$ ist eine Äquivalenz und $\phi : \mathcal{G}\mathcal{F} \to \mathrm{id}$ sowie $\psi : \mathcal{F}\mathcal{G} \to \mathrm{id}$ natürliche Isomorphismen. Ist $Z \in \mathcal{D}$ gegeben, so ist insbesondere $Z \cong \mathcal{F}\mathcal{G}(Z)$, also ist $\mathcal{F}$ wesentlich surjektiv. Betrachte weiter die Abbildung $\mathcal{F}_{X,Y} : \mathrm{Mor}(X,Y) \to \mathrm{Mor}(\mathcal{F}(X), \mathcal{F}(Y))$ und sei $\mathcal{H}_{X,Y} : \mathrm{Mor}(\mathcal{F}(X), \mathcal{F}(Y)) \to \mathrm{Mor}(X,Y)$ definiert durch

$$\mathcal{H}(g) = \phi_{\mathcal{G}\mathcal{F}(Y)} \circ \mathcal{G}(g) \circ \phi^{-1}_{\mathcal{G}\mathcal{F}(X)}.$$

Man prüft, dass $\mathcal{F}_{X,Y}$ und $\mathcal{H}_{X,Y}$ zueinander inverse Bijektionen sind. Also ist $\mathcal{F}$ voll treu.
Sei umgekehrt $\mathcal{F}$ ein voll treuer Funktor. Mit dem Auswahlaxiom wählen wir für jedes $Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ ein $X_Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ mit $\mathcal{F}(X_Z) \cong Z$ und definieren $\mathcal{G}(Z) = X_Z$. Da weiter $\mathcal{F}$ voll treu ist, erhalten wir eine Bijektion

$$\mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(W,Z) = \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(X_W), \mathcal{F}(X_Z)) \cong \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X_W, X_Z),$$

und benutzen diese um $\mathcal{G}_{W,Z} : \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(W,Z) \to \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X_W, X_Z)$ zu definieren. Man prüft, dass auf diese Weise ein Funktor $\mathcal{G} : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ wohldefiniert wird. Eine weitere Überlegung liefert $\mathcal{G}\mathcal{F} \sim \mathrm{id}$ sowie $\mathcal{F}\mathcal{G} \sim \mathrm{id}$. □
Wir können nun eine etwas stärkere Form des Satzes von Serre-Swan formulieren und beweisen.

Satz 1.18 (Serre-Swan). *Sei X ein kompakter Raum. Der Funktor*

$$\mathcal{F}(E) = \Gamma(X; E)$$

liefert eine Äquivalenz $\mathcal{F}$ zwischen der Kategorie der Vektorbündel über X und der Kategorie der endlich erzeugt projektiven Moduln über $C(X)$.

Beweis. Mithilfe von Satz 1.11 prüft man leicht, dass $\mathcal{F}$ ein wohldefinierter Funktor ist. Hierbei beachte man, dass die Morphismen in der Kategorie der Vektorbündel genau die Morphismen im Sinn von Abschnitt 1 sind, und die Morphismen

in der Kategorie der endlich erzeugt projektiven Moduln alle Modulhomomorphismen.
Als nächstes prüft man, dass Modulhomomorphismen $\Gamma(X;E) \to \Gamma(X;F)$ genau den Vektorbündelmorphismen $E \to F$ entsprechen. Hieraus folgt, dass $\mathcal{F}$ einen Isomorphismus

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{F}(E), \mathcal{F}(F)) = \mathrm{Hom}(\Gamma(X;E), \Gamma(X;F)) \cong \mathrm{Mor}(E, F)$$

für alle Vektorbündel E, F induziert. In Satz 1.11 wurde der Fall von Isomorphismen behandelt, die Argumente übertragen sich direkt auf allgemeine Morphismen. Wir schließen, dass $\mathcal{F}$ voll treu ist.
Weiterhin wurde in Satz 1.11 gezeigt, dass jeder endlich erzeugt projektive $C(X)$-Modul isomorph ist zu $\Gamma(X;E)$ für ein Vektorbündel E. Dies bedeutet, dass der Funktor $\mathcal{F}$ wesentlich surjektiv ist. Nach Proposition 1.17 ist $\mathcal{F}$ somit eine Äquivalenz von Kategorien. $\square$

KAPITEL 2

K_0 für C^*-Algebren

1. Ein paar Vorbereitungen

In diesem Abschnitt erinnern wir an einige Konstruktionen und Begriffe, die im folgenden häufig auftreten werden.
Eine Unitarisierung einer C^*-Algebra A ist eine unitale C^*-Algebra B, die A als Ideal enthält. Die minimale Unitarisierung A^+ ist definiert durch $A^+ = A \oplus \mathbb{C}$ mit der Multiplikation

$$(a, \alpha)(b, \beta) = (ab + \alpha b + \beta a, \alpha\beta)$$

und der $*$-Operation

$$(a, \alpha)^* = (a^*, \overline{\alpha}).$$

Auf diese Weise wird A^+ eine unitale $*$-Algebra mit Einselement $(0, 1)$. Man zeigt leicht, dass A^+ eine C^*-Norm trägt, also eine C^*-Algebra ist. Nach Konstruktion gibt es einen kanonischen $*$-Homomorphismus $\iota : A \to A^+$, durch den $A \subset A^+$ zu einem Ideal wird. Also ist A^+ tatsächlich eine Unitarisierung von A.
Man beachte, dass das Einselement von A^+ nicht mit dem Einselement von A übereinstimmt wenn A bereits unital ist. Genauer kann man A^+ in diesem Fall wie folgt beschreiben.

Lemma 2.1. *Sei A eine unitale C^*-algebra mit Einselement 1_A. Dann ist die Abbildung $\gamma : A^+ \to A \oplus \mathbb{C}$ gegeben durch $\gamma(a, \alpha) = (a + \alpha \cdot 1_A, \alpha)$ ein unitaler $*$-Isomorphismus.*

Beweis. Direktes Nachrechnen zeigt, dass γ multiplikativ ist. Die Bijektivität ist offensichtlich. $\square$
Die minimale Unitarisierung einer C^*-Algebra erfüllt folgende universelle Eigenschaft.

Übungsaufgabe 8. *Sei A eine C^*-Algebra und sei B eine unitale C^*-Algebra. Für jeden $*$-Homomorphismus $f : A \to B$ gibt es einen eindeutig bestimmten unitalen $*$-Homomorphismus $F : A^+ \to B$ so dass*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "\iota"] \arrow[dr, "f"'] & & A^+ \arrow[dl, "F"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Im Fall von kommutativen C^*-Algebren liefert die minimale Unitarisierung die Alexandroff-Kompaktifizierung lokal kompakter Räume.

Proposition 2.2. *Sei X ein lokal kompakter Raum. Dann ist $C_0(X)^+$ kanonisch isomorph zu $C(X^+)$ wobei $X^+ = X \cup \{\infty\}$ die Alexandroff-Kompaktifizierung von X ist.*

Beweis. Die Alexandroff-Kompaktifizierung des lokalkompakten Raums X ist $X^+ = X \cup \{+\}$ mit der folgenden Topologie τ. Alle offenen Teilmengen von X,

aufgefasst als Teilmengen von X^+, sind offen bezüglich τ, und ist $U \subset X^+$ eine Menge mit $+ \in U$ so ist U offen bezüglich τ genau dann wenn $X^+ \setminus U \subset X$ kompakt ist.
Da $C(X^+)$ eine unitale C^*-Algebra ist, die

$$C_0(X) \cong \{f \in C(X^+) | f(+) = 0\}$$

als Ideal enthält, gibt es nach der universellen Eigenschaft einen eindeutig bestimmten unitalen $*$-Homomorphismus $\phi : C_0(X)^+ \to C(X^+)$.
Man sieht leicht, dass ϕ surjektiv ist. Angenommen es gilt $\phi((a, \alpha)) = 0$. Dann ist $\phi((a, \alpha))(+) = \alpha = 0$, und somit auch $\phi((a, \alpha))(x) = a(x) - \alpha = a(x) = 0$ für alle $x \in X$. Folglich ist $(a, \alpha) = 0$. □
Wir werden im folgenden häufig mit exakten Sequenzen zu tun haben. Ein Diagramm von abelschen Gruppen der Form

$$\cdots \longrightarrow K_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} K_n \xrightarrow{d_n} K_{n+1} \longrightarrow \cdots$$

heißt eine exakte Sequenz falls $\mathrm{im}(d_{n-1}) = \ker(d_n)$ für alle n gilt. Sind die Gruppen K_n sogar C^*-Algebren und d_n $*$-Homomorphismen, so spricht man von einer exakten Sequenz von C^*-Algebren.
Eine kurze exakte Sequenz ist eine exakte Sequenz der Form

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{\iota} E \xrightarrow{\pi} Q \longrightarrow 0,$$

man nennt ein solches Diagramm auch eine Erweiterung von Q durch K.
Aus der Konstruktion der minimalen Unitarisierung erhält man eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\iota} A^+ \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{C} \longrightarrow 0$$

von C^*-Algebren, wobei $\epsilon : A^+ \to \mathbb{C}, \epsilon(a, \alpha) = \alpha$ der sogenannte Augmentationshomomorphismus ist.

2. Idempotente und Projektionen

Ein Element e eines (nicht notwendig unitalen Rings) A heißt Idempotent wenn $e^2 = e$ gilt. Wir interessieren uns in erster Linie für den Fall dass A eine C^*-Algebra ist und führen folgende Äquivalenzbegriffe für Idempotente ein.

Definition 2.3. *Sei A eine C^*-Algebra und seien e und f Idempotente in A.*
a) $e \sim f$ wenn es $v, w \in A$ gibt mit $vw = e$ und $wv = f$ (Algebraische Äquivalenz)
b) $e \sim_s f$ wenn es ein invertierbares Element $z \in A^+$ gibt mit $zez^{-1} = f$ (Ähnlichkeit)
c) $e \sim_h f$ wenn es einen norm-stetigen Pfad von Idempotenten in A von e nach f gibt (Homotopie)

Hierbei ist ein norm-stetiger Pfad von Idempotenten eine stetige Abbildung $e : [0, 1] \to A$ so dass $e(t)$ Idempotent ist für alle $t \in [0, 1]$.
Wir benötigen ein Lemma.

Lemma 2.4. *Sind $e, f \in A$ Idempotente mit $e \sim f$, so gibt es $x, y \in A$ mit $xy = e, yx = f$, so dass zusätzlich*

$$x = ex = xf, \qquad y = fy = ye$$

gilt.

Beweis. Wähle $v, w \in A$ mit vwe sowie $wv = f$ und setze $x = evf$ und $y = fwe$. Dann gilt

$$xy = evfwe = evwvwe = e$$

und analog $yx = f$. Weiter ist offenbar $x = ex = xf$ und $y = fy = ye$. □

PROPOSITION 2.5. *Die Relationen $\sim, \sim_s$ und $\sim_h$ definieren Äquivalenzrelationen auf der Menge* $\mathrm{Idem}(A)$ *der Idempotente von A.*

BEWEIS. Reflexivität und Symmetrie sind für alle drei Relationen trivial.
Mithilfe von lemma 2.4 können wir zeigen dass $\sim$ transitiv ist. Denn gilt $e_1 \sim e_2$ und $e_2 \sim e_3$ mit

$$e_j = x_j y_j, \qquad e_{j+1} = y_j x_j, \qquad x_j = e_j x_j = x_j e_{j+1}$$

für $j = 1, 2$, so setze $x = x_1 x_2$ und $y = y_2 y_1$. Dann gilt

$$xy = x_1 x_2 y_2 y_1 = x_1 e_2 y_1 = x_1 y_1 = e_1$$

und

$$yx = y_2 y_1 x_1 x_2 = y_2 e_2 x_2 = y_2 x_2 = e_3.$$

Gilt $e_1 \sim_s e_2$ und $e_2 \sim_s e_3$ mit $we_1 w^{-1} = e_2$ und $ze_2 z^{-1} e_3$ so erhalten wir

$$zwe_1(zw)^{-1} = ze_2 z^{-1} = e_3,$$

also ist $\sim_s$ transitiv.
Gilt schliesslich $e_1 \sim_h e_2$ und $e_2 \sim_h e_3$ so erhalten wir eine stetige Homotopie von Idempotenten von e_1 nach e_3 indem wir die gegebenen Homotopien reparametrisieren und verknüpfen. □

Die Äquivalenzrelationen $\sim, \sim_s$ und $\sim_h$ sind eng verwandt. Es ist leicht zu sehen, dass $\sim_s$ stärker ist als $\sim$. Gilt nämlich $e \sim_s f$, also $zez^{-1} = f$ für ein $z \in A^+$, so sind $x = ez^{-1}, y = ze$ Elemente in A mit $e = xy, f = yx$.
Umgekehrt gilt im allgemeinen nicht, dass $e \sim f$ bereits $e \sim_s f$ impliziert. Als Beispiel betrachte eine Projektion $e \in \mathbb{L}(l^2(\mathbb{N}))$ von unendlichem Rang, beispielsweise

$$e(e_n) = \begin{cases} e_n & n \text{ gerade} \\ 0 & n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Mit $v \in \mathbb{L}(l^2(\mathbb{N}))$ gegeben durch $v(e_n) = e_{2n}$ gilt dann $v^*v = 1$ und $vv^* = e$. Also erhalten wir $e \sim 1$, aber da e nicht invertierbar ist gilt nicht $e \sim_s 1$.
Man erhält aber eine umgekehrte Beziehung zwischen algebraischer Äquivalenz und Ähnlichkeit durch Übergang zu Matrixalgebren.

PROPOSITION 2.6. *Sei A eine C^*-Algebra und $e, f \in A$ Idempotente mit $e \sim f$. Dann gilt*

$$\begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim_s \begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

in $M_2(A)$.

BEWEIS. Aus dem Beweis von Proposition 2.5 folgt, dass wir $x, y \in A$ finden mit $xy = e$ und $yx = f$ sowie $x = ex = xf$ und $y = ye = fy$. Dann ist

$$z = \begin{pmatrix} 1-f & y \\ x & 1-e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-e & e \\ e & 1-e \end{pmatrix}$$

in $M_2(A)^+$ invertierbar mit Inversem

$$z^{-1} = \begin{pmatrix} 1-e & e \\ e & 1-e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-f & y \\ x & 1-e \end{pmatrix}.$$

Dies folgt unmittelbar aus

$$\begin{pmatrix} 1-e & e \\ e & 1-e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-e & e \\ e & 1-e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} 1-f & y \\ x & 1-e \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1-f & y \\ x & 1-e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-f+yx & y-fy+x-ye \\ x-xf+x-ex & 1-e+xy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned} z\begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} z^{-1} &= \begin{pmatrix} 1-f & y \\ x & 1-e \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ e & 0 \end{pmatrix} z^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1-f & y \\ x & 1-e \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1-f & y \\ x & 1-e \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} yex & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

wie gewünscht. □

In ähnlicher Weise ist die Relation $\sim_h$ stärker als $\sim_s$.

Proposition 2.7. *Seien $e, f \in A$ Idempotente mit $e \sim_h f$. Ist e_t ein Pfad von Idempotenten von e nach f, so gibt es eine Pfad z_t von invertierbaren Elementen in A^+ mit $z_0 = 1$ und $z_t e z_t^{-1} = e_t$ für alle t. Insbesondere gilt $e \sim_s f$.*

Beweis. Wähle $c > 0$ mit $||2e_t - 1|| \leq c$ für alle $t \in [0,1]$. Da e_t stetig ist und $[0,1]$ kompakt finden wir $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ so dass $||e_t - e_s|| < c^{-1}$ für alle s, t im Intervall $[t_j, t_{j+1}]$ für jedes j. Für $j = 0, \ldots, n-1$ setze

$$v_j(t) = (2e_t - 1)(2e_{t_j} - 1) + 1$$

und $u_j(t) = v_j(t)/2$. Dann ist $u_j(t) \in A^+$ invertierbar für alle $t_j \leq t \leq t_{j+1}$ denn es gilt

$$u_j(t_j) = \frac{1}{2}(2e_{t_j} - 1)(2e_{t_j} - 1) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(4e_{t_j} - 4e_{t_j} + 1) + \frac{1}{2} = 1$$

und

$$||u_j(t) - u_j(t_j)|| = ||(e_t - e_{t_j})(2e_{t_j} - 1)|| \leq ||e_t - e_{t_j}|| ||2e_{t_j} - 1|| \leq c||e_t - e_{t_j}|| < 1.$$

Wir definieren induktiv $z_t = u_0(t)$ für $0 \leq t \leq t_1$ und $z_t = u_k(t) z_{t_k}$ für $t_k \leq t \leq t_{k+1}$. Für $t_k \leq t \leq t_{k+1}$ gilt

$$\begin{aligned} u_k(t) e_{t_k} &= \frac{1}{2}((2e_t - 1)(2e_{t_k} - 1) + 1) e_{t_k} \\ &= e_t(2e_{t_k} - 1)e_{t_k} - \frac{1}{2}e_{t_k} + \frac{1}{2}e_{t_k} \\ &= e_t e_{t_k} \\ &= e_t(2e_t - 1)e_{t_k} - \frac{1}{2}e_t + \frac{1}{2}e_t \\ &= \frac{1}{2}e_t((2e_t - 1)(2e_{t_k} - 1) + 1) \\ &= e_t u_k(t). \end{aligned}$$

Somit erhalten wir insbesondere $z_t e z_t^{-1} = u_0(t) e_{t_0} u_0(t)^{-1} = e_t$ für $0 \leq t \leq t_1$. Angenommen $z_t e z_t^{-1} = e_t$ ist bereits gezeigt für $0 \leq t \leq t_k$. Dann gilt

$$z_t e z_t^{-1} = u_k(t) z_{t_k} e z_{t_k}^{-1} u_k(t)^{-1} = u_k(t) e_{t_k} u_k(t)^{-1} = e_t$$

für $t_k \leq t \leq t_{k+1}$. Somit hat z_t die gewünschten Eigenschaften. □

Wir benötigen ein Lemma.

Lemma 2.8. *Sei A eine unitale C^*-Algebra. Sind $x, y \in A$ invertierbar, so gibt es einen stetigen Pfad von invertierbaren Elementen in $M_2(A)$ von* $\operatorname{diag}(xy, 1)$ *nach* $\operatorname{diag}(x, y)$*. Sind x, y unitär, so kann der Pfad aus unitären Elementen gewählt werden.*

Beweis. Betrachte die Drehmatrix
$$u_t = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{2}t) & -\sin(\frac{\pi}{2}t) \\ \sin(\frac{\pi}{2}t) & \cos(\frac{\pi}{2}t) \end{pmatrix}$$
in $M_2(A)$. Offenbar ist u_t unitär für alle $t \in \mathbb{R}$. Ist $x \in A$ invertierbar (unitär) so liefert
$$u_t \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} u_t^{-1}$$
einen stetigen Pfad von invertierbaren (unitären) Elementen in $M_2(A)$ von
$$\begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = u_0 \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} u_0^{-1}$$
nach
$$u_1 \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} u_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}.$$
Ist x ein weiteres invertierbares (unitäres) Element so ergibt folglich
$$\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} u_t \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} u_t^{-1}$$
einen Pfad von $\operatorname{diag}(xy, 1)$ nach $\operatorname{diag}(x, y)$ mit den gewünschten Eigenschaften. □

Im allgemeinen brauchen ähnliche Idempotente nicht homotop zu sein. Wie im Vergleich von $\sim$ und $\sim_s$ impliziert aber Homotopie die Ähnlichkeit nach Übergang zu Matrizen.

Proposition 2.9. *Sei A eine C^*-Algebra und $e, f \in A$ Idempotente mit $e \sim_s f$. Dann gilt*
$$\begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim_h \begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
in $M_2(A)$.

Beweis. Es gelte $zez^{-1} = f$ in A. Mithilfe von Lemma 2.8 erhalten wir einen stetigen Pfad von invertierbaren Elementen w_t von $\operatorname{diag}(1, 1)$ nach $\operatorname{diag}(z, z^{-1})$. Damit wird
$$e_t = w_t \operatorname{diag}(e, 0) w_t^{-1}$$
ein stetiger Pfad von Idempotenten von $\operatorname{diag}(e, 0)$ nach $\operatorname{diag}(f, 0)$. □

In einer C^*-Algebra ist es oft nützlich, selbstadjungierte Idempotente zu betrachten. Genauer, eine Projektion in der C^*-Algebra A ist ein Element $p \in A$ so dass $p = p^*$ und $p^2 = p$. Eine partielle Isometrie ist ein Element $v \in A$, so dass v^*v eine Projektion ist.

Wir definieren nun Analoga der Äquivalenzrelationen $\sim, \sim_s$ und $\sim_h$ für Projektionen.

Definition 2.10. *Sei A eine C^*-Algebra und seien p und q Projektionen in A.*

a) $p \sim_{vn} q$ wenn es eine partielle Isometrie $v \in A$ gibt mit $vv^* = e$ und $v^*v = f$ (Murray-von Neumann-Äquivalenz)
b) $p \sim_u q$ wenn es ein unitäres Element $u \in A^+$ gibt mit $ueu^{-1} = f$ (Unitäre Äquivalenz)
c) $p \sim_{hp} q$ wenn es einen norm-stetigen Pfad von Projektionen in A von p nach q gibt (Homotopie durch Projektionen)

Es ist leicht zu sehen, dass $\sim_{vn}, \sim_u$ und $\sim_{hp}$ Äquivalenzrelationen auf der Menge der Projektionen von A liefern, vergleiche Proposition 2.5.
Offensichtlich ist jede Projektion ein Idempotent. Umgekehrt gilt

Proposition 2.11. *Sei A eine C^*-Algebra. Jedes Idempotent in A ist homotop zu einer Projektion.*

Beweis. Sei e eine Idempotent und

$$z = 1 + (e - e^*)(e^* - e).$$

Wegen $z \geq 1$ ist z positiv und invertierbar in A^+. Es gilt weiter

$$ze = e + (e - e^*)(e^*e - e) = ee^*e - e^*e + e^*e = ee^*e = ez,$$

also auch

$$ez^{-1} = z^{-1}e, \qquad e^*z^{-1} = z^{-1}e^*.$$

Betrachte das Element $p = ee^*z^{-1} = ez^{-1}e^*$ in A. Offenbar gilt $p^* = p$ sowie

$$p^2 = ee^*z^{-1}ee^*z^{-1} = z^{-1}ee^*ee^*z^{-1} = z^{-1}zee^*z^{-1} = ee^*z^{-1} = p$$

wegen $ee^*e = ze$, also ist p eine Projektion. Weiter erhält man

$$ep = p, \qquad pe = ee^*ez^{-1} = e.$$

Um einen stetigen Pfad von Idempotenten von e nach p zu definieren betrachte

$$z_t = 1 - tp + te$$

für $t \in [0, 1]$. Es ist z_t invertierbar in A^+ mit Inversem $z_t^{-1} = 1 - te + tp$, denn es gilt

$$z_t z_t^{-1} = (1-tp+te)(1-te+tp) = 1-tp+te-te+t^2pe-t^2e+tp-t^2p+t^2ep = 1$$

und analog $z_t^{-1}z_t = 1$. Wir berechnen $z_0ez_0^{-1} = e$ sowie

$$z_1ez_1^{-1} = (e - pe + e)(1 - e + p) = 2ep - pe(1 - e + p) = 2p - p = p$$

somit liefert z_t einen stetigen Pfad von e nach p wie gewünscht. □
Da $\sim_h$ stärker ist als $\sim_s$ nach Proposition 2.7 und $\sim_s$ stärker als $\sim$, folgt aus Proposition 2.11 insbesondere, dass jedes Idempotent auch ähnlich und algebraisch äquivalent zu einer Projektion ist.

Proposition 2.12. *Sind p, q Projektionen in A so gilt $p \sim q \Leftrightarrow p \sim_{vn} q$.*

Beweis. Offensichtlich folgt aus $p \sim_{vn} q$ insbesondere $p \sim q$. Gelte umgekehrt $p \sim q$. Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass p und q ungleich Null sind. Mithilfe von Lemma 2.4 finden wir $x, y \in A$ so dass $p = xy, q = yx$ und $x = pxq, y = qyp$. Damit erhalten wir

$$p = p^*p = y^*x^*xy \leq ||x||^2y^*y,$$

und wegen $p \neq 0$ ist folglich ist y^*y invertierbar in pAp. Sei $r \in pAp$ das Inverse von $(y^*y)^{1/2}$ in pAp, es gelte also $(y^*y)^{1/2}r = p = r(y^*y)^{1/2}$ und $r = prp$. Insbesondere gilt dann $r \geq 0$. Setzen wir $u = yr$ so ergibt sich

$$y = yp = yr(y^*y)^{1/2} = u(y^*y)^{1/2}$$

und $u^*u = ry^*yr = p^2 = p$. Also ist u eine partielle Isometrie. Weiter erhalten wir $quu^* = uu^*$ wegen $qu = qyr = yr$, und ebenso $uu^*q = uu^*$ durch Konjugation dieser Gleichung. Folglich kommutieren q und uu^* und es gilt $q \geq uu^*$. Wegen $y = u(y^*y)^{1/2}$ erhält man ausserdem

$$q = qq^* = yxx^*y^* \leq ||x||^2yy^* = ||x||^2uy^*yu^* \leq ||x||^2||y||^2uu^*.$$

Da sowohl q als auch uu^* Projektionen sind folgt hieraus $q = uu^*$. □

Proposition 2.13. *Sind p, q Projektionen in A so gilt $p \sim_s q \Leftrightarrow p \sim_u q$.*

Beweis. Offensichtlich folgt aus $p \sim_u q$ insbesondere $p \sim_s q$. Für die Umkehrung nehmen wir an, dass $zpz^{-1} = q$ gilt für das invertierbare Element $z \in A^+$. Dann erhalten wir $pz^* = z^*q$, also $pz^*z = z^*qz = z^*zp$, und somit auch $p(z^*z)^{1/2} = (z^*z)^{1/2}p$. Da z und z^* invertierbar sind, ist auch $(z^*z)^{1/2}$ invertierbar. Setzen wir $u = z(z^*z)^{-1/2}$, so ist u unitär und es gilt

$$upu^* = z(z^*z)^{-1/2}p(z^*z)^{-1/2}z^* = zpz^{-1}z(z^*z)^{-1}z^* = q$$

wie gewünscht. □

Proposition 2.14. *Seien p, q Projektionen in A. Dann gilt $p \sim_h q \Leftrightarrow p \sim_{hp} q$.*

Beweis. Offensichtlich folgt aus $p \sim_{hp} q$ insbesondere $p \sim_h q$. Sei umgekehrt e_t ein Pfad von Idempotenten von p nach q. Wir können die Idempotente e_t als ein Idempotent in $C([0,1], A)$ auffassen. Wie im Beweis von Proposition 2.11 liefert $p_t = e_t e_t^* z_t^{-1}$ mit $z_t = 1 + (e_t - e_t^*)(e_t^* - e_t)$ einen stetigen Pfad von Projektionen von p nach q. □

Die verschiedenen Relationen $\sim, \sim_s, \sim_h$ und $\sim_{vn}, \sim_u, \sim_{hp}$ liefern also, bis auf Übergang zu Matrixalgebren, im wesentlichen denselben Begriff von Äquivalenz für Idempotente und Projektionen. Ausserdem genügt es in Bezug auf diese Relation mit Projektionen zu arbeiten.
Ist A eine Algebra so sei $\mathrm{Idem}(A)$ die Menge aller Idempotenten in A. Im Fall das A eine $*$-Algebra ist bezeichne analog $\mathrm{Proj}(A)$ die Menge aller Projektionen in A.
Sei A eine C^*-Algebra. Wir interessieren uns im folgenden für die $*$-Algebra

$$M_\infty(A) = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n(A)$$

aller unendlichen Matrizen über A mit nur endlich vielen von Null verschiedenen Einträgen. Hierbei fassen wir $M_n(A) \subset M_{n+1}(A)$ auf mittels der Einbettung

$$A \mapsto \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Multiplikation und $*$-Operation sind wie üblich definiert.
Obwohl $M_\infty(A)$ keine C^*-Algebra ist, überträgt sich die Definition der obigen Äquivalenzrelationen in offensichtlicher Weise auf Idempotente und Projektionen in $M_\infty(A)$. Genauer, sind $e, f \in M_\infty(A)$ Idempotente so gilt

$$e \sim f \ (e \sim_s f, e \sim_h f) \Leftrightarrow \ \exists n \in \mathbb{N} \text{ so dass } e \sim f \ (e \sim_s f, e \sim_h f) \text{ in } M_n(A)$$

und analog

$$p \sim_{vn} q \ (p \sim_u q, p \sim_{hp} q) \Leftrightarrow \ \exists n \in \mathbb{N} \text{ so dass } p \sim_{vn} q \ (p \sim_u q, p \sim_{hp} q) \text{ in } M_n(A)$$

für Projektionen p, q.
Mit unseren obigen Ergebnissen erhalten wir den folgenden Satz.

Satz 2.15. *Sei A eine C^*-Algebra. Dann erhalten wir natürliche Bijektionen*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Proj}(M_\infty(A))/\sim_{hp} \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\cong"] & \mathrm{Proj}(M_\infty(A))/\sim_u \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\cong"] & \mathrm{Proj}(M_\infty(A))/\sim_{vn} \arrow[d, "\cong"] \\
\mathrm{Idem}(M_\infty(A))/\sim_h \arrow[r, "\cong"] & \mathrm{Idem}(M_\infty(A))/\sim_s \arrow[r, "\cong"] & \mathrm{Idem}(M_\infty(A))/\sim
\end{tikzcd}$$

wobei die vertikalen Bijektionen durch die Inklusionsabbildung $\mathrm{Proj}(M_\infty(A)) \to \mathrm{Idem}(M_\infty(A))$ *induziert sind.*

BEWEIS. Betrachte zunächst die untere Zeile des Diagramms. Da $\sim_h$ stärker ist als $\sim_s$ nach Proposition 2.7 und $\sim_s$ stärker ist als $\sim$ sind die horizontalen Abbildungen wohldefiniert und surjektiv. Nach Proposition 2.6 und Proposition 2.9 sind die Abbildungen auch injektiv; hierfür benutzen wir, dass in $M_\infty(A)$ immer genug Platz ist um zu Matrizen überzugehen.
Die vertikalen Abbildungen sind offenbar wohldefiniert. Nach Proposition 2.12, 2.13 und 2.14 sind diese Abbildungen injektiv, die Surjektivität erhält man aus Proposition 2.11.
Die horizontalen Abbildungen in der oberen Zeile sind ebenfalls wohldefiniert. Die Bijektivität dieser Abbildungen erhalten wir aus der Kommutativität des Diagramms und der Bijektivität der bereits untersuchten Pfeile. $\square$
Wir bezeichnen im folgenden mit $V_{\mathrm{Idem}}(A)$ und $V_{\mathrm{Proj}}(A)$ die Mengen der Äquivalenzklassen von $\mathrm{Idem}(M_\infty(A))$ und $\mathrm{Proj}(M_\infty(A))$ bezüglich der obigen Äquivalenzrelationen. Nach Satz 2.15 ist es hierbei gleichgültig welche der Relationen $\sim, \sim_s, \sim_h$ oder $\sim_{vn}, \sim_u, \sim_{hp}$ wir betrachten. Ausserdem haben wir eine kanonische Bijektion $V_{\mathrm{Proj}}(A) \cong V_{\mathrm{Idem}}(A)$.

3. Definition von K_0

In diesem Abschnitt definieren wir die Gruppe $K_0(A)$ für eine C^*-Algebra A. Wir gehen insbesondere auf die Verbindung zur topologischen K-Theorie ein.
Sei A eine unitale C^*-Algebra. Wir bezeichnen mit $V(A)$ die Menge der Isomorphieklassen von endlich erzeugt projektiven A-Moduln. Durch die direkte Summe von Moduln wird $V(A)$ ein abelsches Monoid. Man beachte, dass $V(A)$ tatsächlich eine Menge ist. In der Tat genügt es, Isomorphieklassen von direkten Summanden von A^n für $n \in \mathbb{N}$ zu betrachten, und diese bilden eine Menge.

DEFINITION 2.16. *Sei A eine unitale C^*-Algebra. Die K_0-Gruppe von A ist*

$$K_0(A) = G(V(A)),$$

die Grothendieckgruppe von $V(A)$.

Wir arbeiten hierbei mit Linksmoduln, später werden wir sehen, dass man eine isomorphe Gruppe erhält wenn man Rechtsmoduln betrachten würde.
Sei $f : A \to B$ ein unitaler $*$-Homomorphismus. Dann erhält man einen Monoidhomomorphismus $f_* : V(A) \to V(B)$ durch

$$f_*([V]) = [B \otimes_A V]$$

wobei B als A-Rechtsmodul aufgefasst wird durch $b \cdot a = bf(a)$ für $b \in B, a \in A$. Hierfür beachte man, dass $B \otimes_A V$ ein endlich erzeugt projektiver B-Modul ist falls V endlich erzeugt projektiver A-Modul ist. Dies wiederum folgt aus $B \otimes_A A^n \cong B^n$ und der Verträglichkeit des Tensorprodukts mit direkten Summen.
Somit induziert f auch einen Gruppenhomomorphisms $f_* : K_0(A) \to K_0(B)$. Auf diese Weise können wir K_0 als Funktor von der Kategorie der unitalen C^*-Algebren in die Kategorie der abelschen Gruppen auffassen.

PROPOSITION 2.17. *Sei X ein kompakter Raum. Dann gibt es einen natürlichen Isomorphismus*

$$K^0(X) \cong K_0(C(X)).$$

BEWEIS. Aus dem Satz von Serre-Swan 1.11 folgt unmittelbar, dass die Abbildung $E \mapsto \Gamma(X; E)$ einen Monoidisomorphismus $V_{\mathbb{C}}(X) \to V(C(X))$ induziert. Wir erhalten einen zugehörigen Isomorphisms $\gamma_X : K^0(X) \to K_0(C(X))$ der Grothendieckgruppen.

Sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung und $C(f) : C(Y) \to C(X)$ der zugehörige $*$-Homomorphismus. Dann erhalten wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} K^0(Y) \arrow[r, "f^*"] \arrow[d, "\gamma_Y"] & K^0(X) \arrow[d, "\gamma_X"] \\ K_0(C(Y)) \arrow[r, "C(f)_*"] & K_0(C(X)) \end{tikzcd}$$

Dies bedeutet, dass γ_X natürlich ist. □

Es ist oft nützlich eine alternative Beschreibung von $K_0(A)$ durch Idempotente oder Projektionen zu verwenden. Hierdurch ergibt sich auch der Bezug zu unseren Überlegungen in Abschnitt 2. Wir wissen aus Satz 1.9, dass jeder endlich erzeugt projektive A-Modul von der Form $A^n e$ für ein Idempotent $e \in M_n(A)$ ist.

Proposition 2.18. *Sei A eine unitale C^*-Algebra und seien $e \in M_m(A)$ und $f \in M_n(A)$ Idempotente. Dann sind die zughörigen projektiven Moduln $A^m e$ und $A^n f$ genau dann isomorph, wenn e und f algebraisch äquivalent sind in $M_\infty(A)$.*

Beweis. Angenommen es gilt $e \sim f$. Nach Definition von algebraischer Äquivalenz finden wir dann $x, y \in M_k(A)$ mit $xy = e$ und $yx = f$ wobei $k \geq m, n$. Wegen $A^m e \cong A^k(\mathrm{diag}(e), 0)$ und $A^n f \cong A^k(\mathrm{diag}(f), 0)$ können wir ohne Einschränkung $m = n = k$ annehmen. Dann erhalten wir Modulhomomorphismen $\phi : A^k e \to A^k f$ und $\psi : A^k f \to A^k e$ durch $\phi(v) = vx$ und $\psi(w) = wy$. Wegen $vx = vex = vxyx = vxf$ ist ϕ wohldefiniert, analog sieht man, dass ψ wohldefiniert ist. Es gilt
$$\phi\psi(w) = wyx = wf = w, \qquad \psi\phi(v) = vxy = ve = v$$
für $v \in A^k e$ und $w \in A^k f$. Analog prüft man $\psi\phi = \mathrm{id}$. Also sind $A^k e$ und $A^k f$ isomorph.

Umgekehrt können wir wieder ohne Einschränkung $m = n = k$ annehmen. Seien $\phi : A^k e \to A^k f$ und $\psi : A^k f \to A^k e$ inverse Modulisomorphismen. Betrachte die Verknüpfung
$$A^k \xrightarrow{\mu_e} A^k e \xrightarrow{\phi} A^k f \xrightarrow{\iota} A^k$$
wobei $\mu_e(v) = ve$. Der so definierte Homomorphismus $A^k \to A^k$ wird durch eine Matrix $x \in M_k(A)$ beschrieben, und analog erhält man eine Matrix $y \in M_k(A)$ für ψ. Nach Konstruktion gilt dann $xy = e$ und $yx = f$, also sind e und f algebraisch äquivalent. □

Satz 2.19. *Sei A eine unitale C^*-Algebra. Dann erhalten wir natürliche Bijektionen*
$$V_{\mathrm{Proj}}(A) \xrightarrow{\cong} V_{\mathrm{Idem}}(A) \xrightarrow{\cong} V(A)$$
Insbesondere sind $V_{\mathrm{Idem}}(A)$ und $V_{\mathrm{Proj}}(A)$ in natürlicher Weise Monoide durch die Addition
$$[e \oplus f] = \left[\begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & f \end{pmatrix}\right],$$
wobei $e \in M_n(A)$, $f \in M_n(A)$ und $\mathrm{diag}(e, f) \in M_{m+n}(A)$.
Damit erhalten wir Isomorphismen
$$K_0(A) \cong G(V_{\mathrm{Idem}}(A)) \cong G(V_{\mathrm{Proj}}(A))$$
von abelschen Gruppen.

Beweis. Wir haben bereits in Abschnitt 2 gesehen, dass die kanonische Abbildung $V_{\mathrm{Proj}}(A) \to V_{\mathrm{Idem}}(A)$ bijektiv ist. Nach Proposition 2.18 und Satz 1.9 ist die Abbildung $V_{\mathrm{Idem}}(A) \to V(A)$ induziert durch $\mathrm{Idem}(M_n(A)) \ni e \mapsto [A^n e] \in V(A)$

wohldefiniert und surjektiv. Wiederum wegen Proposition 2.18 ist diese Abbildung auch injektiv. Die Addition in $V(A)$ entspricht dabei genau der angegebenen Addition von Idempotenten.
Ist $f : A \to B$ ein unitaler $*$-Homomorphismus und $e \in M_n(A)$ ein Idempotent, so gilt $B \otimes_A A^n e \cong B^n f(e)$. Daher sind die obigen Identifikationen natürlich. □
Aus Satz 2.19 folgt insbesondere, dass es bei der Definition von K_0 nicht darauf ankommt ob wir mit Links- oder Rechtsmoduln arbeiten. In der Tat kann man einem Idempotent $e \in M_n(A)$ sowohl den A-Linksmodul $A^n e$ als auch den A-Rechtsmodul eA^n zuordnen, und dies liefert den Übergang zwischen endlich erzeugt projektiven Links- und Rechtsmoduln.
Desweiteren können wir aus dieser Beschreibung folgern, dass K_0 funktoriell für beliebige (nicht notwendig unitale) $*$-Homomorphismen von unitalen C^*-Algebren ist. In der Tat induziert jeder $*$-Homomorphismus $f : A \to B$ einen Monoidhomomorphismus $f_* : V_{\mathrm{Idem}}(A) \to V_{\mathrm{Idem}}(B)$, indem man f komponentenweise auf die Matrixeinträge eines Idempotents in $M_\infty(A)$ anwendet.

Lemma 2.20 (Standardbild von K_0 für unitale C^*-Algebren). *Sei A eine unitale C^*-Algebra.*

a) Jedes Element in $K_0(A)$ lässt sich in der Form

$$x = [P] - [A^n]$$

darstellen mit einem endlich erzeugt projektiven A-Modul P. Alternativ kann man

$$x = [p] - [1_n]$$

schreiben für eine Projektion $p \in M_\infty(A)$, wobei $1_n \in M_n(A) \subset M_\infty(A)$ die Einheitsmatrix ist.

b) Es gilt $[P] - [A^m] = [Q] - [A^n]$ genau dann wenn es ein $k \geq 0$ gibt mit

$$P \oplus A^{n+k} \cong Q \oplus A^{m+k}.$$

Alternativ, es gilt $[p] - [1_m] = [q] - [1_n]$ genau dann wenn es $k \geq 0$ gibt mit

$$\mathrm{diag}(p, 1_{n+k}) \sim \mathrm{diag}(q, 1_{m+k})$$

in $M_\infty(A)$.

Beweis. a) Nach der Konstruktion der Grothendieckgruppe ist ein allgemeines Element in $K_0(A)$ von der Form $x = [P_+] - [P_-]$ mit endlich erzeugt projektiven A-Moduln $P_\pm$. Da P_- direkter Summand in A^n ist für ein $n \in \mathbb{N}$, also $P_- \oplus Q \cong A^n$, erhalten wir mit $P = P_+ \oplus Q$ die gewünschte Form

$$x = [P_+] + [Q] - [P_-] - [Q] = [P_+ \oplus Q] - [P_- \oplus Q] = [P] - [A^n].$$

Die Aussage über Projektionen folgt direkt aus Satz 2.19.
b) Aus der Definition der Äquivalenzrelation in der Grothendieckgruppe folgt, dass $[P] - [A^m] = [Q] - [A^n]$ genau dann gilt wenn es einen endlich erzeugt projektiven Modul R gibt mit $P \oplus A^n \oplus R \cong Q \oplus A^m \oplus R$. Durch Addition eines Moduls S mit $R \oplus S \cong A^k$ können wir ohne Einschränkung annehmen dass R frei ist. Die Aussagen für Projektionen folgen wieder mit Satz 2.19. □

Lemma 2.21 (Additivität). *Seien A_1 und A_2 unitale C^*-Algebren. Dann gibt es einen natürlichen Isomorphismus*

$$K_0(A_1 \oplus A_2) \cong K_0(A_1) \oplus K_0(A_2),$$

induziert durch die Projektionshomomorphismen $A_1 \oplus A_2 \to A_j$ und die Inklusionshomomorphismen $A_j \to A_1 \oplus A_2$ für $j = 1, 2$.

Beweis. Ein Element (e_1, e_2) in $M_\infty(A_1) \oplus M_\infty(A_2) = M_\infty(A_1 \oplus A_2)$ ist genau dann Idempotent wenn e_1 und e_2 Idempotente sind. Weiter gilt $(e_1, e_2) \sim (f_2, f_2)$ für $(e_1, e_2), (f_2, f_2) \in M_\infty(A_1 \oplus A_2)$ genau dann wenn $e_1 \sim f_1$ in $M_\infty(A_1)$ und $e_2 \sim f_2$ in $M_\infty(A_2)$ gilt. Wir erhalten daher einen kanonischen Monoidisomorphismus

$$V_{\mathrm{Idem}}(A_1 \oplus A_2) \cong V_{\mathrm{Idem}}(A_1) \oplus V_{\mathrm{Idem}}(A_2)$$

durch Projektion auf die Komponenten. Die Umkehrabbildung ist induziert durch die kanonischen Inklusionen.
Weiter sieht man leicht, dass für beliebige abelsche Monoide M, N die Beziehung

$$G(M \oplus N) \cong G(M) \oplus G(N)$$

gilt, und hiermit folgt die Behauptung. □
Wir haben bisher stets unitale C^*-Algebren betrachtet. Für nichtunitale Algebren machen die obigen Konstruktionen zwar Sinn, lieferen aber nicht die richtige Theorie. Man muss stattdessen folgendermaßen vorgehen.
Sei A eine C^*-Algebra. Wir erinnern uns, dass die Unitarisierung A^+ eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\iota} A^+ \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{C} \longrightarrow 0$$

liefert. Ist A unital, so gilt $A^+ \cong A \oplus \mathbb{C}$ als unitale Algebren mittels $\gamma : A^+ \to A \oplus \mathbb{C}, \gamma((a, \alpha)) = (a + \alpha 1_A, \alpha)$, und wir erhalten auf diese Weise einen Isomorphismus von kurzen exakten Sequenzen

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, equal] & A^+ \arrow[r, "\epsilon"] \arrow[d, "\gamma"] & \mathbb{C} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\iota"] & A \oplus \mathbb{C} \arrow[r, "\pi"] & \mathbb{C} \arrow[r] & 0, \end{tikzcd}$$

wobei ι jeweils die Einbettung in die erste Komponente bezeichnet und $\pi : A \oplus \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ die Projektion auf die zweite Komponente ist.

Lemma 2.22. *Sei A eine unitale C^*-Algebra. Dann ist $K_0(A)$ natürlich isomorph zum Kern von $\epsilon_* : K_0(A^+) \to K_0(\mathbb{C})$, und wir erhalten eine kurze exakte Sequenz*

$$0 \longrightarrow K_0(A) \xrightarrow{\iota_*} K_0(A^+) \xrightarrow{\epsilon_*} K_0(\mathbb{C}) \longrightarrow 0$$

von abelschen Gruppen.

Beweis. Wir beachten, dass K_0 funktoriell für beliebige $*$-Homomorphismen zwischen unitalen C^*-Algebren ist. Mithilfe von Lemma 2.21 erhalten wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K_0(A) \arrow[r, "\iota_*"] \arrow[d, equal] & K_0(A^+) \arrow[r, "\epsilon_*"] \arrow[d, "\cong"] & K_0(\mathbb{C}) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & K_0(A) \arrow[r, "\iota_*"] & K_0(A) \oplus K_0(\mathbb{C}) \arrow[r, "\pi_*"] & K_0(\mathbb{C}) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

von abelschen Gruppen. Weiter folgt aus Lemma 2.21, dass die untere Zeile dieses Diagramms exakt ist. Also ist auch die obere Zeile exakt, und dies liefert die Behauptung. □
Lemma 2.22 zeigt, dass die folgende Definition verträglich ist mit unserer Definition der K-Theorie für unitale C^*-Algebren.

Definition 2.23. *Sei A eine C^*-Algebra. Die K-Theorie $K_0(A)$ von A ist der Kern der Abbildung $\epsilon_* : K_0(A^+) \to K_0(\mathbb{C})$.*

Wir hatten in Lemma 2.20 gesehen, dass jedes Element von $K_0(A)$ für eine unitale C^*-Algebra A in der Form $x = [p] - [1_n]$ für eine Projektion $p \in M_\infty(A)$ dargestellt werden kann. Aus der Definition 2.23 ist zunächst nicht klar, wie die Elemente von $K_0(A)$ für allgemeines A beschrieben werden können.

Proposition 2.24 (Standardbild von K_0). *Sei A eine C^*-Algebra. Dann gilt*

a) Jedes Element $x \in K_0(A)$ besitzt eine Darstellung $x = [p] - [1_n]$ wobei $p \in M_\infty(A^+)$ eine Projektion ist und $p - 1_n \in M_\infty(A)$ gilt für ein $n \geq 0$.
b) Ist $[p] - [1_m] = [q] - [1_n]$ in $K_0(A)$, so existiert $k \geq 0$ mit $\operatorname{diag}(p, 1_{n+k}) \sim \operatorname{diag}(q, 1_{m+k})$ in $M_\infty(A^+)$.

Beweis. *a)* Nach Lemma 2.20 wissen wir, dass x, aufgefasst als Element von $K_0(A^+)$, in der Form $[p] - [1_n]$ geschrieben werden kann für eine Projektion $p \in M_\infty(A^+)$. Aus der Bedingung $0 = \epsilon_*(x) = \epsilon_*([p]) - \epsilon([1_n]) \in K_0(\mathbb{C}) = \mathbb{Z}$ folgt, dass $\epsilon(p) \in M_\infty(\mathbb{C})$ eine Projektion vom Rang n ist. Durch Konjugation von e mit einem unitären Element $u \in M_\infty(\mathbb{C}) \subset M_\infty(A^+)$ können wir erreichen, dass $\epsilon(p) = 1_n$ gilt, also $p - 1_n \in M_\infty(A)$.
b) Diese Aussage folgt direkt aus Lemma 2.20. □
Wir wollen nun die Funktorialität von K_0 erklären. Nach Konstruktion erhalten wir eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow K_0(A) \longrightarrow K_0(A^+) \xrightarrow{\epsilon_*} K_0(\mathbb{C}) \longrightarrow 0$$

von abelschen Gruppen für beliebige C^*-Algebren.
Sei weiter $f : A \to B$ ein $*$-Homomorphismus. Dann setzt sich f fort zu einem unitalen $*$-Homomorphismus $f^+ : A^+ \to B^+$ durch $f^+(a, \alpha) = (f(a), \alpha)$. Wir erhalten ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K_0(A) \arrow[r] \arrow[d] & K_0(A^+) \arrow[r, "\epsilon_*"] \arrow[d, "(f^+)_*"] & K_0(\mathbb{C}) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & K_0(B) \arrow[r] & K_0(B^+) \arrow[r, "\epsilon_*"] & K_0(\mathbb{C}) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

von abelschen Gruppen, und per Definition ist $K_0(f) : K_0(A) \to K_0(B)$ der linke vertikale Pfeil in diesem Diagramm. Auf diese Weise wird K_0 ein Funktor von der Kategorie der C^*-Algebren in die Kategorie der abelschen Gruppen. Für unitale $*$-Homomorphismen f zwischen unitalen C^*-Algebren prüft man leicht, dass $K_0(f)$ mit unserer ursprünglichen Definition f_* übereinstimmt.
Allerdings haben wir oben bereits eine Funktorialität von K_0 für (beliebige, nicht unitale) $*$-Homomorphismen zwischen unitalen C^*-Algebren erklärt. Wir wollen überprüfen, dass dies mit unserer neuen Definition verträglich ist.
Sei dazu A unital und $e = (e_{ij}) \in M_n(A)$ ein Idempotent. Unter der durch $\gamma^{-1} : A \oplus \mathbb{C} \to A^+$ induzierten Identifizierung

$$M_n(A) \oplus M_n(\mathbb{C}) \xrightarrow{\cong} M_n(A \oplus \mathbb{C}) \xrightarrow{\cong} M_n(A^+)$$

wird $(e, 0)$ auf die Matrix $((e_{ij}, 0))$ abgebildet. Ist $f : A \to B$ ein beliebiger $*$-Homomorphismus zwischen unitalen C^*-Algebren so ist folglich das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
K_0(A) \arrow[r, "\iota_*"] \arrow[d, "f_*"] & K_0(A^+) \arrow[d, "(f^+)_*"] \\
K_0(B) \arrow[r, "\iota_*"] & K_0(B^+)
\end{tikzcd}$$

kommutativ. Hieraus folgt $f_* = K_0(f)$ nach der Definition von $K_0(f)$. Man beachte, dass die horizontalen Abbildungen in dem Diagramm mit unserer alten Definition

von Funktorialität gebildet werden.
Wir können also in Zukunft auch f_* statt $K_0(f)$ schreiben, und werden dies auch tun.
Sei nun A eine beliebige C^*-Algebra. Wir wollen prüfen, dass die definierende Abbildung $\mathrm{inc} : K_0(A) \to K_0(A^+)$ mit ι_* übereinstimmt. Hierfür betrachten wir das Diagramm

$$\begin{tikzcd} K_0(A) \arrow[r, "\mathrm{inc}"] \arrow[d, "\mathrm{inc}"] & K_0(A^+) \arrow[d, "(\iota^+)_*"] \\ K_0(A^+) \arrow[r, "\mathrm{inc}"] & K_0((A^+)^+) \end{tikzcd}$$

wobei die horizontalen Abbildungen jeweils die definierenden Inklusionen sind. Nach Proposition 2.24 kann jedes Element $x \in K_0(A)$ in der Form $x = [p] - [1_n]$ mit einer Projektion $p \in M_\infty(A^+)$ so dass $p - 1_n \in M_\infty(A)$ dargestellt werden. Also wird $[p] \in K_0(A^+)$ repräsentiert durch das Idempotent $(p - 1_n, 1_n) \in M_n(A^+)$. Dann gilt

$$\mathrm{inc} \circ \mathrm{inc}([p] - [1_n]) = [((p - 1_n, 1_n), 0)] - [((0, 1_n), 0)]$$

und

$$(\iota^+)_* \circ \mathrm{inc}([p] - [1_n]) = [((p - 1_n, 0), 1_n)] - [((0, 0), 1_n)]$$

in $K_0((A^+)^+)$. Unter dem Isomorphismus $M_n((A^+)^+) \cong M_n(A^+) \oplus M_n(\mathbb{C})$ entspricht letzteres dem Element

$$[(p - 1_n, 1_n) \oplus 1_n] - [((0, 1_n) \oplus 1_n] = [(p - 1_n, 1_n) \oplus 0] - [(0, 1_n) \oplus 0].$$

Also gilt $\mathrm{inc} = \iota_*$ nach der Definition von ι_*.

4. Homotopieinvarianz

In diesem Abschnitt zeigen wir dass K_0 homotopieinvariant ist. Diese Eigenschaft der K-Theorie ergibt sich leicht aus den Beschreibungen in Abschnitt 3. Zunächst erklären wir die Homotopie zwischen $*$-Homomorphismen.

Definition 2.25. *Zwei $*$-Homomorphismen $f, g : A \to B$ heißen homotop, wenn es eine Familie $h_t : A \to B$ von $*$-Homomorphismen gibt für $t \in [0,1]$ so dass $[0,1] \ni t \mapsto h_t(a)$ stetig ist für alle $a \in A$ und $h_0 = f$ sowie $h_1 = g$. Wir schreiben in diesem Fall $f \sim g$.*

Die Homomorphismen $(h_t)_{t\in[0,1]}$ in einer Homotopie setzen sich zusammen zu einem $*$-Homomorphismus $h : A \to C([0,1], B) = C[0,1] \otimes B$ mittels

$$h(a)(t) = h_t(a).$$

Umgekehrt liefert jeder $*$-Homomorphismus $h : A \to C([0,1], B)$ eine Homotopie zwischen $h_0 = ev_0 \circ h$ und $h_1 = ev_1 \circ h$ wobei $ev_t : C([0,1], B) \to B, ev_t(f) = f(t)$ für $t \in [0,1]$ die Auswertung im Punkt t bezeichne.

Proposition 2.26 (Homotopieinvarianz von K_0). *Seien A und B C^*-Algebren und $f, g : A \to B$ homotope $*$-Homomorphismen. Dann gilt $f_* = g_* : K_0(A) \to K_0(B)$.*

Beweis. Ist $h : A \to C([0,1], B)$ eine Homotopie zwischen f und g so ist $h^+ : A^+ \to C([0,1], B)^+ \subset C([0,1], B^+)$ eine Homotopie zwischen f^+ und g^+. Es genügt daher den Fall zu betrachten dass f und g unitale $*$-Homomorphismen sind. Offenbar gilt bereits $f_* = g_* : V_{\mathrm{Idem}}(A) \to V_{\mathrm{Idem}}(B)$ nach Satz 2.15, da homotope Idempotente äquivalent sind. Hieraus folgt unmittelbar $f_* = g_* : K_0(A) \to K_0(B)$ nach Satz 2.19. □

Zwei C^*-Algebren A und B heißen homotopieäquivalent, wenn es zwischen ihnen $*$-Homomorphismen $f : A \to B$ und $g : B \to A$ gibt mit $gf \sim \mathrm{id}_A$ und $fg \sim \mathrm{id}_B$. Nach Proposition 2.26 haben homotopieäquivalente C^*-Algebren isomorphe K_0-Gruppen.

Wir können auf diese Weise einige K-Gruppen bestimmen. Betrachte $A = C[0,1]$ und $B = \mathbb{C}$. Sei weiter $u : \mathbb{C} \to C[0,1]$ die Abbildung $u(1) = 1$, und $ev_s : C[0,1] \to \mathbb{C}$ für $s \in [0,1]$ die Auswertungsabbildung. Offenbar gilt $ev_0 \circ u = \mathrm{id}$. Weiter ist $u \circ ev_0$ homotop zur Identität durch die Homotopie $h : C[0,1] \to C([0,1], C[0,1])$

$$h(f)(t, s) = f(ts).$$

Folglich gilt $u_* \circ (ev_0)_* = \mathrm{id} : K_0(C[0,1]) \to K_0(C[0,1])$, und somit sind A und B homotopieäquivalent. Insbesondere erhalten wir

$$K_0(C[0,1]) \cong K_0(\mathbb{C}) = \mathbb{Z}.$$

Analog ist $C_0((0,1])$ homotopieäquivalent zu 0, und folglich $K_0(C_0((0,1])) = 0$.

5. Halbexaktheit

In diesem Abschnitt zeigen wir, dass der Funktor K_0 halbexakt ist.

Wir erinnern uns zunächst, dass eine Erweiterung von C^*-Algebren eine kurze exakte Sequenz der Form

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\iota} E \xrightarrow{\pi} Q \longrightarrow 0$$

mit C^*-Algebren I, E, Q ist, also ι ein injektiver $*$-Homomorphismus, π ein surjektiver $*$-Homomorphismus ist und $\mathrm{im}(\iota) = \ker(\pi)$ gilt. In diesem Fall ist $I \cong \iota(I)$ ein Ideal in E und $E/I \cong Q$. Eine Erweiterung heißt unital, wenn E unital ist. In diesem Fall ist auch Q unital mit dem Einselement $1_Q = \pi(1_E)$.

Man nennt Erweiterungen auch kurze exakte Sequenzen von C^*-Algebren. Ein

Funktor $\mathcal{F}$ von der Kategorie der C^*-Algebren in die Kategorie der abelschen Gruppen heißt halbexakt, wenn jede kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\iota} E \xrightarrow{\pi} Q \longrightarrow 0$$

von C^*-Algebren eine exakte Sequenz

$$\mathcal{F}(I) \xrightarrow{\mathcal{F}(\iota)} \mathcal{F}(E) \xrightarrow{\mathcal{F}(\pi)} \mathcal{F}(Q)$$

von abelschen Gruppen induziert. Dies bedeutet nichts anderes als $\operatorname{im}(\mathcal{F}(\iota)) = \ker(\mathcal{F}(\pi))$.

LEMMA 2.27. *Sei*

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\iota} E \xrightarrow{\pi} Q \longrightarrow 0$$

eine unitale Erweiterung von C^*-Algebren. Ist $u \in M_n(Q)$ invertierbar, so gibt es ein invertierbares Element $\hat{u} \in M_{2n}(E)$ mit $\pi(\hat{u}) = \operatorname{diag}(u, u^{-1})$.

BEWEIS. Da π surjektiv ist finden wir $v, w \in M_n(E)$ mit $\pi(v) = u$ und $\pi(w) = u^{-1}$. Hierbei bezeichnen wir auch die Fortsetzung $M_n(E) \to M_n(Q)$ von $\pi : E \to Q$ auf Matrizen wieder mit π.
Betrachte die Matrix

$$\hat{u} = \begin{pmatrix} v & vw - 1 \\ 1 - wv & 2w - wvw \end{pmatrix}$$

in $M_{2n}(E)$. Dann ist $\hat{u}$ invertierbar mit dem Inversen

$$\hat{u}^{-1} = \begin{pmatrix} 2w - wvw & 1 - wv \\ vw - 1 & v \end{pmatrix}.$$

In der Tat erhält man

$$\begin{aligned} \hat{u}\hat{u}^{-1} &= \begin{pmatrix} v & vw - 1 \\ 1 - wv & 2w - wvw \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2w - wvw & 1 - wv \\ vw - 1 & v \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2vw - vwvw + (vw-1)^2 & v - vwv + vwv - v \\ (1 - wv)(2w - wvw) + (2w - wvw)(vw - 1) & (1 - wv)^2 + 2wv - wvwv \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und analog $\hat{u}^{-1}\hat{u} = 1$. Nach Konstruktion gilt ausserdem $\pi(\hat{u}) = \operatorname{diag}(u, u^{-1})$. □

SATZ 2.28 (Halbexaktheit). *Der Funktor K_0 ist halbexakt, es induziert also jede Erweiterung von C^*-Algebren*

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\iota} E \xrightarrow{\pi} Q \longrightarrow 0$$

eine exakte Sequenz

$$K_0(I) \xrightarrow{\iota_*} K_0(E) \xrightarrow{\pi_*} K_0(Q)$$

der K-Gruppen.

BEWEIS. Aus der Funktoralität der K-Theorie folgt $\pi_*\iota_* = (\pi\iota)_* = 0$, also $\operatorname{im}(\iota_*) \subset \ker(\pi_*)$. Wir müssen $\ker(\pi_*) \subset \operatorname{im}(\iota_*)$ zeigen.
Durch Unitarisierung erhalten wir einen surjektiven Homomorphismus $\pi^+ : E^+ \to Q^+$ und eine unitale Erweiterung

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\iota} E^+ \xrightarrow{\pi^+} Q^+ \longrightarrow 0$$

von C^*-Algebren. Auch für Matrixalgebren über I, E und Q erhält man analoge Erweiterungen.

Nach Proposition 2.24 kann jedes Element von $K_0(E)$ in der Form $[p] - [1_n]$ geschrieben werden wobei $p \in M_\infty(E^+)$ eine Projektion ist und $p - 1_n \in M_\infty(E)$ gilt. Weiter ist die Bedingung $\pi_*([p] - [1_n]) = 0$ gleichbedeutend mit

$$\operatorname{diag}(\pi(p), 1_k) \sim 1_{n+k}$$

in $M_\infty(Q^+)$ für ein geeignetes $k \geq 0$. Insbesondere finden wir $r \geq n + k$ so dass $\operatorname{diag}(\pi(p), 1_k, 0) \sim_s \operatorname{diag}(1_n, 1_k, 0)$ in $M_r(Q^+)$, also

$$u \operatorname{diag}(\pi(p), 1_k, 0) u^{-1} = \operatorname{diag}(1_n, 1_k, 0)$$

für ein invertierbares Element $u \in M_r(Q^+)$.
Nach Lemma 2.27 erhalten wir zu u ein invertierbares Element $\hat{u} \in M_{2r}(E^+)$ mit $\pi(\hat{u}) = \operatorname{diag}(u, u^{-1})$. Betrachte nun $q = \hat{u} \operatorname{diag}(p, 1_k, 0)\hat{u}^{-1} \in M_{2r}(E^+)$. Nach Konstruktion gilt

$$\pi(q) = \operatorname{diag}(u, u^{-1}) \operatorname{diag}(\pi(p), 1_k, 0) \operatorname{diag}(u^{-1}, u) = \operatorname{diag}(1_{n+k}, 0)$$

und folglich $q \in M_\infty(I^+)$. Weiter liegt

$$[p] - [1_n] = [\operatorname{diag}(p, 1_k, 0)] - [\operatorname{diag}(1_{n+k}, 0)] = [q] - [1_{n+k}]$$

im Bild von ι_*. Hieraus folgt $\operatorname{im}(\iota_*) = \ker(\pi_*)$ wie gewünscht. $\square$
Im allgemeinen gilt weder, dass die Abbildung ι_* injektiv ist noch dass π_* surjektiv ist. Wir werden dies später genauer diskutieren.
An dieser Stelle soll lediglich ein Spezialfall betrachtet werden. Eine Erweiterung von C^*-Algebren

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\iota} E \xrightarrow{\pi} Q \longrightarrow 0$$

heißt zerfallend exakt (splitexakt), wenn es einen Homomorphismus $\sigma : Q \to E$ gibt mit $\pi\sigma = \mathrm{id}$. Einen solchen Homomorphismus nennt man auch einen Split für π.
Ist zum Beispiel $E = I \oplus Q$ die direkte Summenerweiterung, so erhält man einen Split durch die offensichtliche Inklusion von Q in die zweite Komponente.
Nicht jede zerfallend exakte Erweiterung ist aber eine direkte Summenerweiterung, wie das Beispiel der Unitarisierungserweiterung

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\iota} A^+ \xrightarrow{\pi} \mathbb{C} \longrightarrow 0$$

für eine nichtunitale C^*-Algebra A zeigt.

Satz 2.29 (Splitexaktheit). *Der Funktor K_0 ist splitexakt, es induziert also jede zerfallend exakte Erweiterung von C^*-Algebren*

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\iota} E \xrightarrow{\pi} Q \longrightarrow 0$$

eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow K_0(I) \xrightarrow{\iota_*} K_0(E) \xrightarrow{\pi_*} K_0(Q) \longrightarrow 0$$

in K-Theorie.

Beweis. Sei $\sigma : Q \to E$ ein Split für π. Aus der Funktoralität der K-Theorie folgt $\pi_*\sigma_* = \mathrm{id}$, also ist π_* surjektiv. Es bleibt wegen Satz 2.28 nur zu zeigen, dass ι_* injektiv ist.
Sei $x = [p] - [1_n] \in K_0(I)$ mit $p \in M_\infty(I^+)$ so dass $p - 1_n \in M_\infty(I)$ und $\iota_*(x) = 0$. Dann gibt es ein unitäres Element $u \in M_\infty(E^+)$ so dass $u\iota^+(p)u^* = 1_n$. Betrachte $v = \sigma^+\pi^+(u^*)u$ in $M_\infty(E^+)$. Es gilt $\pi^+(v) = \pi^+(u^*)\pi^+(u) = \pi^+(u^*u) = 1$. Somit erhalten wir $v = \iota^+(w)$ für ein Element $w \in M_\infty(I^+)$. Das Element w ist unitär da ι^+ injektiv ist. Weiter gilt

$$\begin{aligned} \iota^+(wpw^*) &= v\iota^+(p)v^* = \sigma^+\pi^+(u^*)u\iota^+(p)u^*\sigma^+\pi^+(u) \\ &= \sigma^+\pi^+(u^*1_nu) = \sigma^+\pi^+\iota^+(p) = \iota^+(1_n), \end{aligned}$$

wobei wir für die letzte Gleichung $\pi\iota = 0$ verwenden. Wegen der Injektivität von ι^+ erhalten wir folglich $wpw^* = 1_n$. Also gilt $x = 0$ wie gewünscht. $\square$

6. Stetigkeit und Stabilität

In diesem Abschnitt führen wir zunächst induktive Limiten von C^*-Algebren und abelschen Gruppen ein. Anschliessend zeigen wir, dass K_0 stetig ist, also mit induktiven Limiten vertauscht. Hieraus folgern wir die Stabilität von K_0 unter Tensorprodukten mit kompakten Operatoren.
Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie. Ein induktives System in $\mathcal{C}$ ist eine Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Objekten in $\mathcal{C}$ zusammen mit Morphismen $\phi_{n,m} : X_m \to X_n$ für alle $m \leq n$ so dass $\phi_{n,n} = \mathrm{id}$ und

$$\phi_{n,m}\phi_{m,k} = \phi_{n,k}$$

für alle $k \leq m \leq n$ in $\mathbb{N}$ gilt. Offenbar gilt dann

$$\phi_{n,m} = \phi_{n,n-1}\phi_{n-1,n-2}\cdots\phi_{m+1,m},$$

die Morphismen sind also schon durch $\phi_{n+1,n}$ für $n \in \mathbb{N}$ eindeutig bestimmt. Wir schreiben auch

$$X_1 \xrightarrow{\phi_{2,1}} X_2 \xrightarrow{\phi_{3,2}} X_3 \xrightarrow{\phi_{4,3}} \cdots$$

für ein induktives System.
Man kann induktive Systeme auch allgemeiner für gerichtete Mengen I oder kleine Kategorien betrachten, für unsere Zwecke ist aber der Fall $I = \mathbb{N}$ ausreichend.

Definition 2.30. *Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie und $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zusammen mit den Morphismen $(\phi_{n,m})$ ein induktives System in $\mathcal{C}$. Ein induktiver Limes für dieses System ist ein Objekt $\varinjlim X_n \in \mathcal{C}$ zusammen mit Morphismen $\iota_n : X_n \to \varinjlim X_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so dass*

$$\begin{tikzcd} X_m \arrow[rr, "\phi_{n,m}"] \arrow[dr, "\iota_m"'] & & X_n \arrow[dl, "\iota_n"] \\ & \varinjlim X_n & \end{tikzcd}$$

kommutativ ist für $m \leq n$ und folgende universelle Eigenschaft gilt:
Für jedes $Y \in \mathcal{C}$ und jede Familie von Morphismen $\psi_n : X_n \to Y$ mit $\psi_n \circ \phi_{n,m} = \psi_m$ gibt es einen eindeutig bestimmten Morphismus $\psi : \varinjlim X_n \to Y$ so dass

$$\begin{tikzcd} & X_n \arrow[dl, "\iota_n"'] \arrow[dr, "\psi_n"] & \\ \varinjlim X_n \arrow[rr, "\psi"'] & & Y \end{tikzcd}$$

kommutativ ist für alle n.

Im allgemeinen brauchen induktive Limiten nicht zu existieren. Wenn ein induktiver Limes existiert so ist er aber stets eindeutig bis auf Isomorphie, dies folgt leicht aus der universellen Eigenschaft. Wir schreiben dann kurz $X = \varinjlim X_n$, obwohl auch die Morphismen ι_n Bestandteil der Struktur des induktiven Limes sind. Wir interessieren uns im folgenden insbesondere für induktive Limiten von abelschen Gruppen und C^*-Algebren.

Proposition 2.31. *Jedes induktive System*

$$A_1 \xrightarrow{\phi_{2,1}} A_2 \xrightarrow{\phi_{3,2}} A_3 \xrightarrow{\phi_{4,3}} \cdots$$

von C^*-Algebren besitzt einen induktiven Limes $\varinjlim A_n$. Bezeichnet $\iota_j : A_j \to \varinjlim A_n$ die zugehörigen $*$-Homomorphismen so gilt

$$\varinjlim A_n = \overline{\bigcup_{j=1}^{\infty} \iota_j(A_j)}$$

und

$$||\iota_k(a)|| = \lim_{n\to\infty} ||\phi_{n,k}(a)||$$

für alle $a \in A_k$.

Beweis. Nach Voraussetzung ist eine Familie $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von C^*-Algebren gegeben zusammen mit $*$-Homomorphismen $\phi_{n+1,n} : A_n \to A_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir bezeichnen mit

$$C^*\text{-}\prod_{n\in\mathbb{N}} A_n = \left\{ (a_n) \in \prod_{n\in\mathbb{N}} A_n |\sup ||a_n|| < \infty \right\}$$

das C^*-algebraische Produkt der A_n und mit

$$C^*\text{-}\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} A_n = \left\{ (a_n) \in \prod_{n\in\mathbb{N}} A_n |\lim ||a_n|| = 0 \right\} \subset C^*\text{-}\prod_{n\in\mathbb{N}} A_n$$

die C^*-algebraische direkte Summe. Mit der Supremumsnorm und der komponentenweisen Multiplikation sind dies in natürlicher Weise C^*-Algebren.
Betrachte die Quotientenabbildung

$$\pi : C^*\text{-}\prod_{n\in\mathbb{N}} A_n \to C^*\text{-}\prod_{n\in\mathbb{N}} A_n \Big/ C^*\text{-}\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} A_n$$

und definiere $\gamma_k(a) \in C^*\text{-}\prod A_n$ für $a \in A_k$ durch

$$\gamma_k(a)_n = \begin{cases} \phi_{n,k}(a) & n \geq k \\ 0 & n < k. \end{cases}$$

Dies liefert einen $*$-Homomorphismus, und ebenso ist $\iota_k = \pi\gamma_k$ ein $*$-Homomorphismus für alle $k \in \mathbb{N}$. Wir definieren

$$\varinjlim A_n = \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} \iota_k(A_k)} \subset C^*\text{-}\prod_{n\in\mathbb{N}} A_n \Big/ C^*\text{-}\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} A_n.$$

Für $l \geq k$ gilt dann

$$\gamma_l(\phi_{l,k}(a))_n = \gamma_k(a)_n$$

für alle $a \in A_k$ und $n \geq l$. Hieraus folgt $\iota_l\phi_{l,k} = \iota_k$ für alle $l \geq k$.
Nach Konstruktion ist $\varinjlim A_n$ der Abschluss der Vereinigung von $\iota_k(A_k)$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Weiter gilt

$$||\iota_k(a)|| = ||\pi\gamma_k(a)|| = \limsup_{n\geq k} ||\phi_{n,k}(a)|| = \lim_{n\to\infty} ||\phi_{n,k}(a)||,$$

der Limes existiert, da die $*$-Homomorphismen $\phi_{n,k}$ kontraktiv sind.
Sei nun $\psi_n : A_n \to B$ eine Familie von $*$-Homomorphismen mit $\psi_l\phi_{l,k} = \psi_k$ für alle $l \geq k$. Dann gilt $||\psi_k(a)|| = ||\psi_l\phi_{l,k}(a)|| \leq ||\phi_{l,k}(a)||$ für alle $l \geq k \in \mathbb{N}$, also

$$||\psi_k(a)|| \leq \lim_{l\to\infty} ||\phi_{l,k}(a)|| = ||\iota_k(a)||$$

für $a \in A_k$. Insbesondere gilt $\ker(\iota_k) \subset \ker(\psi_k)$, und die Abbildung ψ_k induziert einen $*$-Homomorphismus $\Psi_k : A_k/\ker(\iota_k) \cong \iota_k(A_k) \to B$. Die so entstehende Familie von Homomorphismen ist verträglich mit den Inklusionsabbildungen, in dem Sinn dass Ψ_l eine Fortsetzung von Ψ_k ist für $l \geq k$. Da jede der Abbildungen Ψ_k kontraktiv ist, erhalten wir einen eindeutig bestimmten kontraktiven $*$-Homomorphismus

$$\psi : \bigcup_{k=1}^{\infty} \iota_k(A_k) \to B$$

mit $\psi \circ \iota_k = \psi_k$. Diese Abbildung setzt sich in eindeutiger Weise zu einem $*$-Homomorphismus $\psi : \varinjlim A_n \to B$ mit den gewünschten Eigenschaften fort. □

Ein Spezialfall von induktiven Limiten wird in der folgenden Proposition beschrieben.

Proposition 2.32. *Sei A eine C^*-Algebra und*

$$A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \cdots \subset A$$

eine Folge von Unter-C^*-Algebren mit

$$\overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k} = A.$$

Zusammen mit den natürlichen Inklusionen $\iota_k : A_k \to A$ ist dann

$$A \cong \varinjlim A_n$$

der induktive Limes von A.

Beweis. Sei B eine C^*-Algebra und seien $\psi_k : A_k \to B$, die mit den Inklusionen $A_k \subset A_{k+1}$ verträglich sind. Dann erhält man einen eindeutig bestimmten $*$-Homomorphisms

$$\psi : \mathcal{A} = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \to B$$

mit $\psi_{|A_k} = \psi_k$. Da die $*$-Homomorphismen ψ_k normvermindernd sind und $\mathcal{A} \subset A$ dicht, setzt sich ψ eindeutig zu einem $*$-Homomorphismus $\psi : A \to B$ fort. Man prüft unmittelbar, dass dieser Homomorphismus die gewünschte Eigenschaft hat. Ist $\rho : A \to B$ ein weiterer $*$-Homomorphismus mit $\rho\iota_k = \psi_k$ so stimmt ρ auf $\mathcal{A}$ mit ψ überein, wegen der Dichtheit von $\mathcal{A}$ in A gilt daher $\rho = \psi$. □

Als Beispiel betrachte einen unendlichdimensionalen separablen Hilbertraum $\mathcal{H}$ mit Orthonormalbasis $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Setzen wir $\mathcal{H}_n = span(e_1, \ldots, e_n) \subset \mathcal{H}$, so erhalten wir eine natürliche Identifizierung $M_n(\mathbb{C}) = \mathrm{End}(\mathcal{H}_n)$. Die offensichtlichen Einbettungen $\iota_n : M_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{K}(\mathcal{H})$ erfüllen die Bedingung aus Proposition 2.32. Also gibt es einen kanonischen Isomorphismus

$$\varinjlim M_n(\mathbb{C}) \cong \mathbb{K}(\mathcal{H}).$$

Auch für abelsche Gruppen existieren stets induktive Limiten.

Proposition 2.33. *Jedes induktive System*

$$A_1 \xrightarrow{\phi_{2,1}} A_2 \xrightarrow{\phi_{3,2}} A_3 \xrightarrow{\phi_{4,3}} \cdots$$

von abelschen Gruppen besitzt einen induktiven Limes $\varinjlim A_n$. Bezeichnet $\iota_j : A_j \to \varinjlim A_n$ die zugehörigen Gruppenhomomorphismen, so gilt

$$\varinjlim A_n = \bigcup_{j=1}^{\infty} \iota_j(A_j).$$

BEWEIS. Es sei
$$A = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} A_n$$
die direkte Summe der Gruppen A_n. Weiter sei $\nu_k : A_k \to A$ die kanonische Einbettung. Wir betrachten die Untergruppe $U \subset A$, die von allen Elementen der Form $\nu_m(a) - \nu_n(\phi_{n,m}(a))$ mit $a \in A_m$ für $m \in \mathbb{N}$ erzeugt wird und setzen
$$\varinjlim A_n = A/U.$$
Bezeichnet $\pi : A \to A/U$ die Quotientenabbildung so sei $\iota_n = \pi\nu_n$. Dann gilt nach Konstruktion
$$\varinjlim A_n = \bigcup_{j=1}^{\infty} \iota_j(A_j)$$
und $\iota_m = \iota_n\phi_{n,m}$ für $n \geq m$.
Sei nun B eine weitere abelsche Gruppe und $\psi_n : A_n \to B$ eine Familie von Homomorphismen mit $\psi_n\phi_{n,m} = \psi_m$. Dann erhält man einen eindeutig bestimmten Homomorphismus $\Psi : A \to B$ mit $\Psi\nu_n = \pi_n$, indem man die Abbildungen ψ_n komponentenweise anwendet. Ausserdem gilt
$$\Psi(\nu_m(a) - \nu_n(\phi_{n,m}(a))) = \psi_m(a) - \psi_n(\phi_{n,m}(a)) = 0$$
für alle $a \in A_m$. Also faktorisiert Ψ zu einem eindeutig bestimmten Homomorphismus $\psi : \varinjlim A_n \to B$ mit $\psi\iota_n = \psi_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. □
Wir benötigen zwei Lemmata.

LEMMA 2.34. *Sei A eine C^*-Algebra. Sind $p, q \in A$ Projektionen mit $||p-q|| < 1$ so gilt $p \sim_u q$.*

BEWEIS. Für jede Projektion e gilt $||2e - 1|| = 1$. Betrachte
$$u = \frac{1}{2}((2q-1)(2p-1) + 1)$$
in A^+. Wie im Beweis von Proposition 2.7 ergibt sich, dass u invertierbar ist und
$$qu = \frac{1}{2}(q + (2q-q)(2p-1)) = qp = up$$
gilt. Also erhalten wir $upu^{-1} = q$. Nach Proposition 2.13 folgt damit $p \sim_u q$. □
Sei A eine C^*-Algebra und $\mathcal{A}$ eine dichte Unter-$*$-Algebra von A. Dann heißt $\mathcal{A} \subset A$ abgeschlossen unter (stetigem) Funktionalkalkül, wenn für jedes normale Element $a \in \mathcal{A}$ und jede stetige Funktion $f \in C_0(\mathrm{Spec}_A(a))$ gilt, dass $f(a)$ in $\mathcal{A}$ enthalten ist. Wir erinnern daran, dass das Spektrum von $a \in A$ definiert ist als $\mathrm{Spec}_{A^+}(a) \setminus \{0\}$ falls A nichtunital ist.

LEMMA 2.35. *Sei A eine C^*-Algebra und $\mathcal{A} \subset A$ eine unter stetigem Funktionalkalkül abgeschlossene Unter-$*$-Algebra.*
a) Ist $p \in \mathrm{Proj}(A)$ eine Projektion, so existiert $q \in \mathrm{Proj}(\mathcal{A})$ mit $p \sim_u q$.
b) Ist A unital und $1 \in \mathcal{A}$, so liegt die unitäre Gruppe $U(\mathcal{A})$ dicht in $U(A)$.

BEWEIS. *a)* Da $\mathcal{A} \subset A$ dicht liegt, finden wir eine Folge x_n in $\mathcal{A}$ mit $\lim x_n = p$. Wegen $p^*p = p$ gilt dann auch $x_n^*x_n \to p$, wir können also ohne Einschränkung annehmen dass die Elemente x_n positiv sind für alle n. Wegen $p^2 - p = 0$ finden wir ein $n \in \mathbb{N}$ mit
$$||p - x_n|| < \frac{1}{2}, \qquad ||x_n^2 - x_n|| < \frac{1}{4}.$$
Aus der zweiten Ungleichung folgt $\mathrm{Spec}_A(x_n) \subset [0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$. Also ist die Funktion $f : \mathrm{Spec}_A(x_n) \to [0,1]$ mit $f(t) = 0$ für $t \in \mathrm{Spec}_A(x_n) \cap [0, \frac{1}{2})$ und $f(t) = 1$ für $t \in \mathrm{Spec}_A(x_n) \cap (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ stetig. Somit ist $q = f(x_n) \in A$ eine Projektion, und

da $\mathcal{A} \subset A$ abgeschlossen unter stetigem Funktionalkalkül ist gilt $q \in \mathcal{A}$. Wegen $|f(t) - t| \leq \frac{1}{2}$ für $t \in [0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ gilt $||q - x_n|| \leq \frac{1}{2}$. Somit ergibt sich

$$||p - q|| \leq ||p - x_n|| + ||x_n - q|| < 1,$$

und nach Lemma 2.34 liefert dies die Behauptung.
b) Sei $u \in A$ unitär. Da $\mathcal{A} \subset A$ dicht liegt, finden wir eine Folge z_n in $\mathcal{A}$ mit $z_n \to u$. Insbesondere gilt auch $z_n^* \to u^* = u^{-1}$. Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass alle z_n und z_n^* invertierbar in A sind, denn die invertierbaren Elemente in A bilden eine offene Menge. Da $\mathcal{A} \subset A$ abgeschlossen unter stetigem Funktionalkalkül ist folgt somit $|z_n|^{-1} = (z_n^* z_n)^{-1/2} \in \mathcal{A}$. Also ist $u_n = z_n|z_n|^{-1}$ in $\mathcal{A}$ und es gilt $u_n^* u_n = |z_n|^{-1} z_n^* z_n |z_n|^{-1} = 1$ sowie $u_n u_n^* = z_n(z_n^* z_n)^{-1} z_n^* = 1$. Folglich ist u_n ein unitäres Element in $\mathcal{A}$, und wegen $u_n \to u|u|^{-1} = u$ folgt die gewünschte Aussage. □

Satz 2.36 (Stetigkeit von K_0). *Sei*

$$A_1 \xrightarrow{\phi_{2,1}} A_2 \xrightarrow{\phi_{3,2}} A_3 \xrightarrow{\phi_{4,3}} \cdots$$

ein induktives System von C^*-Algebren. Dann gibt es einen kanonischen Isomorphismus

$$\varinjlim K_0(A_n) \cong K_0(\varinjlim A_n)$$

von abelschen Gruppen.

Beweis. Durch Unitarisierung erhalten wir aus dem gegebenen induktiven System ein induktives System

$$A_1^+ \xrightarrow{\phi_{2,1}^+} A_2^+ \xrightarrow{\phi_{3,2}^+} A_3^+ \xrightarrow{\phi_{4,3}^+} \cdots$$

von unitalen C^*-Algebren und unitalen $*$-Homomorphismen, und es gibt einen kanonischen Isomorphismus

$$(\varinjlim A_n)^+ \cong \varinjlim (A_n^+).$$

Weiter sind die Zeilen in dem kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \varinjlim K_0(A_n) \arrow[r] \arrow[d] & \varinjlim K_0(A_n^+) \arrow[r] \arrow[d] & \varinjlim K_0(\mathbb{C}) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & K_0(\varinjlim A_n) \arrow[r] & K_0(\varinjlim A_n^+) \arrow[r] & K_0(\mathbb{C}) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

exakt. Man beachte hierbei, dass die exakten Sequenzen von abelschen Gruppen

$$0 \longrightarrow K_0(A_n) \longrightarrow K_0(A_n^+) \longrightarrow K_0(\mathbb{C}) \longrightarrow 0$$

sogar zerfallend exakt sind, also isomorph zu direkten Summenerweiterungen. Direkte Summenerweiterungen bleiben unter direkten Limiten erhalten. Es gilt sogar ganz allgemein, dass direkte Limiten von exakten Sequenzen von abelschen Gruppen wieder exakt sind.
Aus diesen Überlegungen folgern wir, dass es genügt induktive Systeme von unitalen C^*-Algebren zu betrachten.
Wir werden der Einfachheit halber nur den Fall behandeln, dass alle Verbindungsabbildungen $\phi_{n,m}$ injektive (unitale) $*$-Homomorphismen sind. In diesem Fall sind die kanonischen Abbildungen $\iota_k : A_k \to A = \varinjlim A_n$ injektiv, hierdurch vereinfachen sich die Argumente etwas.
Die Funktorialität der K-Theorie liefert $(\iota_m)_*(\phi_{m,n})_* = (\iota_n)_*$ für $m \geq n$. Aus der universellen Eigenschaft des induktiven Limes erhalten wir also einen Homomorphismus

$$\gamma : \varinjlim K_0(A_n) \to K_0(\varinjlim A_n).$$

Wir wollen zunächst zeigen, dass γ surjektiv ist. Für das induktive System

$$M_k(A_1) \xrightarrow{\phi_{2,1}} M_k(A_2) \xrightarrow{\phi_{3,2}} M_k(A_3) \xrightarrow{\phi_{4,3}} \cdots$$

für $k \in \mathbb{N}$ prüft man leicht

$$\varinjlim M_k(A_n) \cong M_k(\varinjlim A_n).$$

Weiter sei $p \in M_k(\varinjlim A_n)$ eine Projektion. Da

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} \iota_j(M_k(A_j)) \subset M_k(\varinjlim A_j)$$

abgeschlossen unter stetigem Funktionalkalkül ist finden wir nach Lemma 2.35 ein j und eine Projektion $q \in M_k(A_j) \cong \iota_j(M_k(A_j))$ so dass $\iota_j(q) \sim_u p$. Hieraus folgt dass γ surjektiv ist.

Für die Injektivität sei $\gamma(x) \in \varinjlim K_0(A_n)$ repräsentiert durch $x = [p] - [1_m]$ mit einer Projektion $p \in M_\infty(A_k)$. Die Bedingung $\gamma(x) = 0$ bedeutet $\iota_k(p) \sim_u 1_m$ in $M_\infty(\varinjlim A_n)$. Also existiert ein unitäres Element $u \in M_\infty(\varinjlim A_n)$ mit $u\iota_k(p)u^{-1} = 1_m$. Mithilfe von Lemma 2.35 finden wir ein unitäres Element $v \in M_\infty(A_l)$ für ein $l \geq k$ mit

$$||v\phi_{l,k}(p)v^{-1} - 1_m|| < 1.$$

Nach Lemma 2.34 folgt damit $\phi_{l,k}(p) \sim_u 1_m$ in $M_\infty(A_l)$. Also gilt

$$x = (\iota_k)_*([p] - [1_m]) = (\iota_l)_*(\phi_{l,k})_*([p] - [1_m]) = 0,$$

und wir schließen, dass γ injektiv ist. □

Als Folgerung von Satz 2.36 wollen wir zeigen dass K_0 invariant ist unter Tensorieren mit kompakten Operatoren. Wir betrachten zunächst den endlichdimensionalen Fall.

PROPOSITION 2.37. *Sei A eine C^*-Algebra und $e \in M_n(\mathbb{C})$ eine Projektion vom Rang 1. Dann induziert der $*$-Homomorphismus $\iota : A \to M_n(A) \cong M_n(\mathbb{C}) \otimes A, \iota(a) = e \otimes a$ einen Isomorphismus*

$$K_0(A) \cong K_0(M_n(\mathbb{C}) \otimes A).$$

BEWEIS. Wir nehmen zunächst an, dass A unital ist. Betrachte den $M_n(A)$-A-Bimodul $P = A^n$ mit den Modulstrukturen

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j}v_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{nj}v_j \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \cdot a = \begin{pmatrix} v_1 a \\ \vdots \\ v_n a \end{pmatrix}$$

gegeben durch Matrixmultiplikation.

Für jeden A-Linksmodul E wird $P \otimes_A E$ ein $M_n(A)$-Linksmodul. Man prüft leicht, dass $P \otimes_A E$ endlich erzeugt projektiv als $M_n(A)$-Modul ist, falls E endlich erzeugt als A-Modul ist.

In vollkommen analoger Weise erhalten wir einen A-$M_n(A)$-Bimodul $Q = A^n$ mit den Modulstrukturen

$$a \cdot \begin{pmatrix} v_1 & \cdots & v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} av_1 & \cdots av_n \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} v_1 & \cdots v_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n v_j a_{j1} & \cdots & \sum_{j=1}^n v_j a_{jn} \end{pmatrix}$$

gegeben durch Matrixmultiplikation. Für jeden $M_n(A)$-Linksmodul E wird $Q \otimes_{M_n(A)} E$ ein A-Linksmodul. Man prüft leicht, dass $Q \otimes_{M_n(A)} E$ endlich erzeugt projektiv

als A-Modul ist, falls E endlich erzeugt als $M_n(A)$-Modul ist.
Wir erhalten auf diese Weise Monoidhomomorphism $p : V(A) \to V(M_n(A))$ und $q : V(M_n(A)) \to V(A)$. Da es natürliche Bimodulisomorphismen

$$P \otimes_A Q \cong M_n(A), \qquad Q \otimes_{M_n(A)} P \cong A$$

gibt, folgt dass p und q zueinander inverse Isomorphismen sind. Die Abbildung $p : K_0(A) \to K_0(M_n(A))$ entspricht dabei genau ι_*.
Der nichtunitale Fall folgt nun aus der Split-Exaktheit von K_0. $\square$

SATZ 2.38. *Sei A eine C^*-Algebra, $\mathcal{H}$ ein separabler Hilbertraum und $p \in \mathbb{K}(\mathcal{H})$ eine Projektion vom Rang* 1. *Dann induziert der $*$-Homomorphismus $\iota : A \to \mathbb{K}(\mathcal{H}) \otimes A, \iota(a) = p \otimes a$ einen Isomorphismus*

$$K_0(A) \cong K_0(\mathbb{K}(\mathcal{H}) \otimes A).$$

BEWEIS. Wegen Proposition 2.37 genügt es den Fall zu betrachten, dass $\mathcal{H}$ unendlichdimensional ist. Wir wählen eine Orthonormalbasis $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ für $\mathcal{H}$ so dass $e_1 = p\mathcal{H}$ und setzen $\mathcal{H}_n = span(e_1, \dots, e_n) \subset \mathcal{H}$. Dann erhalten wir eine natürliche Identifizierung $M_n(\mathbb{C}) = \mathrm{End}(\mathcal{H}_n)$, und die Einbettungsabbildungen $\iota_n : A \to M_n(A), \iota_n(a) = p \otimes a$ liefern ein induktives System

$$A \xrightarrow{\phi_{2,1}} M_2(A) \xrightarrow{\phi_{3,2}} M_3(A) \xrightarrow{\phi_{4,3}} \cdots$$

mit injektiven Verbindungsabbildungen. Aus der Definition des Tensorprodukts $\mathbb{K}(\mathcal{H}) \otimes A$ folgt unmittelbar

$$\varinjlim M_n(A) \cong \mathbb{K}(\mathcal{H}) \otimes A.$$

Nach Proposition 2.37 sind die Verbindungsabbildungen im induzierten System

$$K_0(A) \xrightarrow{\phi_{2,1}} K_0(M_2(A)) \xrightarrow{\phi_{3,2}} K_0(M_3(A)) \xrightarrow{\phi_{4,3}} \cdots$$

alle Isomorphismen. Da $\varinjlim M_n(A) \cong A \otimes \mathbb{K}(\mathcal{H})$ gilt, folgt die Aussage aus Satz 2.36. $\square$

KAPITEL 3

K_1 für C^*-Algebren

In diesem Kapitel führen wir die Gruppe $K_1(A)$ ein. Diese Gruppe wird mithilfe der invertierbaren Elemente in Matrixalgebren über der C^*-Algebra definiert. Im Gegensatz zur Konstruktion von $K_0(A)$ geht hierbei die Topologie von A explizit ein. Wir beschreiben die Beziehung zu Einhängungen und konstuieren eine lange exakte Sequenz. Die Beschreibung dieser Sequenz wird aber erst durch den Beweis der Bott-Periodizität im nächsten Kapitel vollständig.

1. Invertierbare und unitäre Elemente

In diesem Abschnitt betrachten wir die Beziehung zwischen invertierbaren und unitären Elementen.
Ist A eine unitale C^*-Algebra so bezeichnen wir mit $GL_n(A)$ die Gruppe der invertierbaren Elemente von $M_n(A)$. Wir erhalten eine Einbettungsabbildung $GL_n(A) \to GL_{n+1}(A)$ durch $z \mapsto \mathrm{diag}(z, 1)$ und bilden auf diese Weise

$$GL_\infty(A) = \bigcup_{n=1}^{\infty} GL_n(A).$$

Wir können $GL_\infty(A)$ alternativ beschreiben als die Menge der unendlichen invertierbaren Matrizen von der Form $x = 1_\infty + m$ für $m \in M_\infty(A)$. Hierbei bezeichnet 1_∞ die unendliche Einheitsmatrix.
Analog bezeichnen wir mit $U_n(A)$ die Gruppe der unitären Elemente von $M_n(A)$ und setzen

$$U_\infty(A) = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n(A).$$

Ist $f : A \to B$ ein unitaler $*$-Homomorphismus, so erhalten wir in offensichtlicher Weise induzierte Gruppenhomomorphismen $GL_n(f) : GL_n(A) \to GL_n(B)$ und $U_n(f) : U_n(A) \to U_n(B)$ für $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Lemma 3.1. *Sei A eine unitale C^*-Algebra und $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Dann ist $GL_n(A)$ in natürlicher Weise isomorph zum Kern von $GL_n(\epsilon) : GL_n(A^+) \to GL_n(\mathbb{C})$. Analog ist $U_n(A)$ natürlich isomorph zum Kern von $U_n(\epsilon) : U_n(A^+) \to U_n(\mathbb{C})$.*

Beweis. Da A unital ist gilt $A^+ \cong A \oplus \mathbb{C}$, und wir erhalten Isomorphismen

$$GL_n(A^+) \cong GL_n(A \oplus \mathbb{C}) \cong GL_n(A) \times GL_n(\mathbb{C})$$

Hierbei entspricht die Abbildung $GL_n(\epsilon)$ gerade der Projektion auf die Komponente $GL_n(\mathbb{C})$, und dies ergibt die Behauptung. Die Aussage für U_n wird in vollkommen analoger Weise gezeigt. $\square$
Ist A nicht unital, so gibt es keine invertierbaren oder unitären Elemente in $M_n(A)$. Wir betrachten daher für $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ die Gruppen

$$GL_n(A) = \ker(GL_n(A^+) \to GL_n(\mathbb{C})) \subset GL_n(A^+),$$

und

$$U_n(A) = \ker(U_n(A^+) \to U_n(\mathbb{C})) \subset U_n(A^+),$$

Nach Lemma 3.1 ist diese Notation verträglich mit den obigen Definitionen falls A unital ist.
Alternativ können wir $GL_n(A)$ und $U_n(A)$ auffassen als die Menge alle invertierbaren (unitären) Matrizen in $GL_n(A^+)$, die von der Form $1_n + x$ für $x \in M_n(A)$ sind. Als Teilmengen von $GL_n(A^+)$ erhalten die Gruppen $GL_n(A)$ und $U_n(A)$ eine natürliche Topologie.

PROPOSITION 3.2. *Sei A eine C^*-Algebra und $n \in \mathbb{N}$. Die Inklusion $\iota : U_n(A) \to GL_n(A)$ ist eine Homotopieäquivalenz.*

BEWEIS. Sei $z \in GL_n(A)$ und $f(z) = z|z|^{-1}$. Wegen $\epsilon(z) = 1_n$ gilt $\epsilon(f(z)) = 1_n$. Also erhält man $f(z) \in U_n(A)$, und weiter gilt $f(\iota(u)) = u$ für alle $u \in U_n(A)$. Setze

$$h_t(z) = f(z) \exp(t \log(|z|))$$

für $t \in [0, 1]$. Wie oben sieht man mithilfe von

$$\epsilon(h_t(z)) = f(\epsilon(z)) \exp(t \log(\epsilon(|z|))) = 1_n$$

dass $H(z)(t) = h_t(z)$ eine stetige Abbildung $H : GL_n(A) \to GL_n(A) \times [0, 1]$ definiert. Es gilt offenbar $h_0(z) = f(z)$ sowie $h_1(z) = z|z|^{-1}|z| = z$. Somit ist $f : GL_n(A) \to U_n(A)$ bis auf Homotopie invers zu ι. □

2. Die Indexabbildung

In diesem Abschnitt zeigen wir wie die zu einer Erweiterung von C^*-Algebren assoziierte kurze exakte Sequenz von K_0-Gruppen in natürlicher Weise nach links fortgesetzt werden kann.
Sei

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\iota} E \xrightarrow{\pi} Q \longrightarrow 0$$

eine Erweiterung von C^*-Algebren. Durch Unitarisieren erhalten wir in natürlicher Weise eine unitale Erweiterung

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\iota} E^+ \xrightarrow{\pi^+} Q^+ \longrightarrow 0$$

von C^*-Algebren.
Sei $u \in GL_\infty(Q^+)$, und wähle $n \in \mathbb{N}$ mit $u \in GL_n(Q^+)$. Nach Lemma 2.27 finden wir ein Element $\hat{u} \in GL_{2n}(E^+)$ mit $\pi^+(\hat{u}) = \mathrm{diag}(u, u^{-1})$. Es gilt

$$\pi^+(\hat{u}\, \mathrm{diag}(1_n, 0)\hat{u}^{-1}) = \pi^+(\hat{u})\, \mathrm{diag}(1_n, 0)\pi^+(\hat{u}^{-1}) = \mathrm{diag}(1_n, 0),$$

und folglich $\hat{u}\, \mathrm{diag}(1_n, 0)\hat{u}^{-1} \in M_{2n}(I^+)$. Weiterhin ergibt sich

$$\hat{u}\, \mathrm{diag}(1_n, 0)\hat{u}^{-1} - \mathrm{diag}(1_n, 0) \in M_{2n}(I).$$

Also liefert

$$\mathrm{ind}(u) = [\hat{u}\, \mathrm{diag}(1_n, 0)\hat{u}^{-1}] - [\mathrm{diag}(1_n, 0)]$$

eine Element in $K_0(I)$.

LEMMA 3.3. *Die obige Konstruktion induziert einen wohldefinierten Gruppenhomomorphismus* $\mathrm{ind} : GL_\infty(Q^+) \to K_0(I)$*, genannt Indexabbildung.*

BEWEIS. Sei $u \in GL_\infty(Q^+)$ und wähle $n \in \mathbb{N}$ mit $u \in GL_n(Q^+)$. Zunächst zeigen wir, dass $\mathrm{ind}(u)$ nicht von der Wahl von n abhängt, anschliessend zeigen wir, dass die Klasse $\mathrm{ind}(u)$ unabhängig von der Wahl des Lifts $\hat{u} \in GL_{2n}(E^+)$ ist.
Ist $m \geq n$ und betrachtet man u als Element von $GL_m(Q^+)$, so kann man einen Lift von $\mathrm{diag}(u, u^{-1})$ mithilfe von $\mathrm{diag}(\hat{u}, 1_{m-n}, 1_{m-n})$ konstruieren, wobei die erste Kopie von 1_{m-n} geeignet gedreht wird. Die Klasse von $\mathrm{ind}(u)$ ändert sich hierbei nicht, da lediglich $[1_{m-m}]$ in $K_0(I)$ addiert und subtrahiert wird.
Sei nun $\hat{v} \in GL_{2n}(E^+)$ ein weiterer Lift von $\mathrm{diag}(u, u^{-1})$. Dann gilt $\hat{v}\hat{u}^{-1} \in$

$GL_{2n}(I^+)$, und folglich sind $\hat{u}\operatorname{diag}(1_n,0)\hat{u}^{-1}$ und $\hat{v}\operatorname{diag}(1_n,0)\hat{v}^{-1}$ in $M_{2n}(I)$ äquivalent. Also ist ind wohldefiniert.
Seien nun $u, v \in GL_\infty(Q^+)$ und wähle $n \in \mathbb{N}$ mit $u, v \in GL_n(Q^+)$. Die Konstruktion im Beweis von Lemma 2.8 liefert eine Homotopie h_t zwischen $\operatorname{diag}(\hat{u},\hat{v})$ und $\operatorname{diag}(\hat{u}\hat{v}, 1_{2n})$ in $GL_{4n}(E^+)$, und es gilt $h_t \operatorname{diag}(1_n,0,1_n,0)h_t^{-1} \in M_{4n}(I^+)$ sowie $h_t \operatorname{diag}(1_n,0,1_n,0)h_t^{-1} - \operatorname{diag}(1_n,0,1_n,0) \in M_{4n}(I)$ für alle t. Man erhält damit

$$\begin{aligned}
\operatorname{ind}(u) + \operatorname{ind}(v) &= [\hat{u}\operatorname{diag}(1_n,0)\hat{u}^{-1}] - [\operatorname{diag}(1_n,0)] \\
&\qquad + [\hat{v}\operatorname{diag}(1_n,0)\hat{v}^{-1}] - [\operatorname{diag}(1_n,0)] \\
&= [\operatorname{diag}(\hat{u},\hat{v})\operatorname{diag}(1_n,0,1_n,0)\operatorname{diag}(\hat{u}^{-1},\hat{v}^{-1})] - [\operatorname{diag}(1_n,0,1_n,0)] \\
&= [\hat{u}\hat{v}\operatorname{diag}(1_n,0)(\hat{u}\hat{v})^{-1}] - [\operatorname{diag}(1_n,0)] = \operatorname{ind}(uv),
\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt verwenden, dass $\hat{u}\hat{v}$ ein Lift von $\operatorname{diag}(uv,(uv)^{-1})$ ist. Somit ist ind ein Gruppenhomomorphismus. □

Satz 3.4. *Es gilt* $\operatorname{ind}(u) = 0$ *genau dann wenn* u *im Bild von* $\pi^+ : GL_\infty(E^+) \to GL_\infty(Q^+)$ *liegt, und das Bild von* ind *ist gleich dem Kern von* $\iota_* : K_0(I) \to K_0(E)$. *Also erhält man eine exakte Sequenz*

$$0 \longrightarrow GL_\infty(Q^+)/\pi^+(GL_\infty(E^+)) \xrightarrow{\operatorname{ind}} K_0(I) \xrightarrow{\iota_*} K_0(E) \xrightarrow{\pi_*} K_0(Q)$$

von abelschen Gruppen.

Beweis. Offenbar gilt $\operatorname{ind}\circ\pi^+ = 0$ denn für $u = \pi^+(v)$ mit $v \in GL_n(E^+)$ können wir $\hat{u} = \operatorname{diag}(v, v^{-1}) \in GL_{2n}(E^+)$ als Lift wählen. Dann gilt

$$\hat{u}\operatorname{diag}(1_n,0)\hat{u}^{-1} = \operatorname{diag}(1_n,0),$$

also ist die Klasse $[\hat{u}\operatorname{diag}(1_n,0)\hat{u}^{-1}] - [\operatorname{diag}(1_n,0)]$ das Nullelement in $K_0(I)$.
Umgekehrt sei $u \in GL_n(Q^+) \subset GL_\infty(Q^+)$ und es gelte $\operatorname{ind}(u) = 0$. Dann gibt es ein $k \geq 0$ so dass $\operatorname{diag}(\hat{u}, 1_k)\operatorname{diag}(1_n, 0, 1_k)\operatorname{diag}(\hat{u}^{-1}, 1_k)$ und 1_{n+k} ähnlich sind in $M_\infty(I^+)$. Durch Vergrößern von n können wir erreichen, dass $k = 0$ gilt. Es gibt dann $y \in GL_r(I^+)$ für $r \geq 2n$ mit

$$\hat{u}\operatorname{diag}(1_n,0)\hat{u}^{-1} = y^{-1}\operatorname{diag}(1_n,0)y$$

in $GL_r(I^+)$. Wiederum durch Vergrößern von n können wir erreichen, dass $r = 2n$ gilt. Dann vertauscht $y\hat{u}$ mit $\operatorname{diag}(1_n,0)$, also hat die Matrix $y\hat{u} = \operatorname{diag}(w,z) \in GL_{2n}(E^+)$ Diagonalgestalt. Wegen $\pi^+(\hat{u}) = \operatorname{diag}(u,u^{-1})$ gilt ebenso $\pi^+(y) = \operatorname{diag}(c,d)$ für $c, d \in GL_n(\mathbb{C})$. Wir können y durch $\operatorname{diag}(c^{-1},d^{-1})y$ ersetzen und daher ohne Einschränkung $y \in GL_{2n}(I)$ annehmen. Damit ergibt sich

$$\operatorname{diag}(\pi^+(w),\pi^+(z)) = \pi^+(y\hat{u}) = \operatorname{diag}(u,u^{-1}),$$

somit ist $w \in GL_n(E^+)$ ein Lift von u. Also erhalten wir $\ker(\operatorname{ind}) = \operatorname{im}(\pi^+)$, insbesondere ist $\operatorname{im}(\pi^+) \subset GL_\infty(Q^+)$ ein Normalteiler.
Weiter gilt $\iota_* \circ \operatorname{ind} = 0$ da 1_n und $\hat{u}\operatorname{diag}(1_n,0)\hat{u}^{-1}$ nach Konstruktion ähnlich sind in $M_\infty(E^+)$. Umgekehrt sei $[e] - [1_n] \in K_0(I)$ im Kern von ι_* enthalten, wobei $e \in M_k(I^+)$ ein Idempotent sei mit $e - 1_n \in M_k(I)$. Aus $\iota_*([e] - [1_n]) = 0$ folgt, dass es ein $l \geq 0$ gibt so dass $\operatorname{diag}(e, 1_l)$ und 1_{n+l} in $M_r(E^+)$ ähnlich sind für r hinreichend groß. Durch Übergang zu $\operatorname{diag}(e, 1_m)$ und 1_{n+m} für geeignetes m können wir erreichen dass $l = 0$ und $r = 2n$ gilt. Sei $v \in GL_{2n}(E^+)$ ein Element mit $v\operatorname{diag}(1_n,0)v^{-1} = e$. Insbesondere kommutiert dann $\pi^+(v)$ mit $\operatorname{diag}(1_n,0)$. Also ist $\pi^+(v)$ von der Form $\pi^+(v) = \operatorname{diag}(u,w)$ mit $u, w \in GL_n(Q^+)$. Nach Lemma 2.27 gibt es einen Lift $\hat{u} \in GL_{2n}(E^+)$ von $\operatorname{diag}(u,u^{-1})$. Also ist $\hat{u}^{-1}v \in GL_{2n}(E^+)$ ein Lift von $\operatorname{diag}(1_n, uw)$. Durch geeignetes Vertauschen von Zeilen und Spalten

erhalten wir hieraus ein Element $x \in GL_{2n}(E^+)$ mit $\pi^+(x) = \operatorname{diag}(uw, 1_n)$. Betrachte nun $z = \operatorname{diag}(\hat{u}, 1_n) \operatorname{diag}(1_n, x) \operatorname{diag}(v, 1_n)^{-1} \in GL_{3n}(E^+)$. Wegen

$$\pi^+(z) = \operatorname{diag}(u, u^{-1}, 1_n) \operatorname{diag}(1_n, uw, 1_n) \operatorname{diag}(u^{-1}, w^{-1}, 1_n) = 1_{3n}$$

gilt $z \in GL_{3n}(I^+)$. Da $\operatorname{diag}(1_n, x)$ offenbar mit $\operatorname{diag}(1_n, 0, 0)$ vertauscht erhalten wir somit

$$\begin{aligned}
&[\operatorname{diag}(e, 0)] - [\operatorname{diag}(1_n, 0)] = [v \operatorname{diag}(1_n, 0) v^{-1}] - [\operatorname{diag}(1_n, 0)] \\
&= [\operatorname{diag}(v, 1_n) \operatorname{diag}(1_n, 0, 0) \operatorname{diag}(v^{-1}, 1_n)] - [\operatorname{diag}(1_n, 0)] \\
&= [\operatorname{diag}(v, 1_n) \operatorname{diag}(1_n, x^{-1}) \operatorname{diag}(1_n, 0, 0) \operatorname{diag}(1_n, x) \operatorname{diag}(v^{-1}, 1_n)] - [\operatorname{diag}(1_n, 0)] \\
&= [\operatorname{diag}(\hat{u}, 1_n) \operatorname{diag}(1_n, 0, 0) \operatorname{diag}(\hat{u}^{-1}, 1_n)] - [\operatorname{diag}(1_n, 0)] \\
&= [\hat{u} \operatorname{diag}(1_n, 0) \hat{u}^{-1}] - [\operatorname{diag}(1_n, 0)]
\end{aligned}$$

in $K_0(I)$, und folglich $[e] - [1_n] = \operatorname{ind}(u)$.
Aus diesen Aussagen folgt, dass der Quotient $GL_\infty(Q)/\pi^+(GL_\infty(E))$ isomorph ist zum Kern von $\iota_* : K_0(I) \to K_0(E)$. Die Exaktheit der Sequenz ergibt sich dann zusammen mit der Halbexaktheit von K_0 aus Satz 2.28. □

3. Definition von K_1

In diesem Abschnitt definieren wir die Gruppen $K_1(A)$ für eine C^*-Algebra A. Im Gegensatz zur Konstruktion von K_0 geht hierbei die Topologie von A ein.
Zwei invertierbare Elemente $x, y \in GL_n(A)$ heißen homotop, wenn es einen stetigen Pfad von invertierbaren Elementen in $GL_n(A)$ gibt, der x und y verbindet. Genauer, es gibt eine stetige Abbildung $u : [0,1] \to GL_n(A)$ mit $u(0) = x$ und $X(1) = y$. Hierbei trägt $GL_n(A)$ die durch $M_n(A)$ induzierte Topologie. Wir schreiben $x \sim y$ wenn x und y homotop sind.
Sei $GL_n(A)_0 \subset GL_n(A)$ die Menge aller Elemente die homotop zu 1_n sind. Offensichtlich gilt $xy \in GL_n(A)_0$ für $x, y \in GL_n(A)_0$, und für $x \in GL_n(A)_0$ und beliebiges $z \in GL_n(A)$ gilt $zxz^{-1} \in GL_n(A)_0$. Also ist $GL_n(A)_0 \subset GL_n(A)$ ein Normalteiler.
In ähnlicher Weise nennt man $x, y \in GL_\infty(A)$ homotop, wenn es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $x \sim y$ in $GL_n(A)$. Wir erhalten den Normalteiler $GL_\infty(A)_0 \subset GL_\infty(A)$ als die Menge aller Elemente die homotop zu 1 sind.
In analoger Weise definiert man Homotopie für Elemente in $U_n(A)$ und den Normalteiler $U_n(A)_0$ für $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Definition 3.5. *Sei A eine C^*-Algebra. Dann ist*

$$K_1(A) = GL_\infty(A)/GL_\infty(A)_0 = \varinjlim GL_n(A)/GL_n(A)_0$$

die Gruppe der Homotopieklassen von Elementen in $GL_\infty(A)$.

Die Gruppenstruktur auf $K_1(A)$ ist durch die Multiplikation in $GL_\infty(A)$ gegeben. Mithilfe von Lemma 2.8 ergibt sich, dass diese Struktur äquivalent ist zu der durch

$$[x][y] = [\operatorname{diag}(x, y)] = [\operatorname{diag}(y, x)] = [y][x]$$

induzierten Gruppenstruktur für $x, y \in GL_n(A)$. Insbesondere ist $K_1(A)$ eine abelsche Gruppe.
Aus Proposition 3.2 folgt unmittelbar, dass die Inklusion $U_\infty(A) \to GL_\infty(A)$ einen Isomorphismus

$$K_1(A) \cong U_\infty(A)/U_\infty(A)_0 = \varinjlim U_n(A)/U_n(A)_0$$

induziert.

LEMMA 3.6. *Die Gruppen* $GL_n(\mathbb{C})$ *und* $U_n(\mathbb{C})$ *sind wegzusammenhängend für alle* $n \in \mathbb{N}$. *Insbesondere gilt* $K_1(\mathbb{C}) = 0$.

BEWEIS. Es genügt wegen Proposition 3.2 zu zeigen, dass $U_n(\mathbb{C})$ wegzusammenhängend ist. Hierfür definiere $ln : \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}$ durch $ln(re^{i\phi}) = \log(r) + i\phi$ für $r > 0$ und $\phi \in [0, 2\pi)$.
Sei nun $u \in U_n(\mathbb{C})$. Da $\mathrm{Spec}(u) \subset S^1$ eine endliche Menge ist, ist $ln : \mathrm{Spec}(u) \to \mathbb{C}$ stetig, und für $t \in [0, 1]$ liefert

$$u_t = \exp(t\, ln(u))$$

einen stetigen Weg in $U_n(\mathbb{C})$ mit $u_0 = 1$ und $u_1 = u$. $\square$
Als Folgerung erhalten wir

PROPOSITION 3.7. *Sei* A *eine* C^**-Algebra. Die kanonische Abbildung*

$$\iota : GL_n(A)/GL_n(A)_0 \to GL_n(A^+)/GL_n(A^+)_0$$

ist ein Isomorphismus für alle $n \in \mathbb{N}$. *Insbesondere gibt es einen natürlichen Isomorphismus* $K_1(A) \cong K_1(A^+)$.

BEWEIS. Ist $x \in GL_n(A)^+$ so finden wir nach Lemma 3.6 eine Homotopie $u_t \in GL_n(\mathbb{C})$ von $u_0 = 1_n$ nach $u_1 = \epsilon(x)$. Durch xu_t^{-1} erhält man dann eine Homotopie in $GL_n(A^+)$ von x nach $xu_1^{-1} \in GL_n(A)$. Also ist ι surjektiv.
Gelte weiter $\iota([x]) = [1_n]$ für $x \in GL_n(A)$. Dann gibt es eine Homotopie $u_t \in GL_n(A^+)$ mit $u_0 = 1_n$ und $u_1 = x$. Wegen $\epsilon(u_0) = 1_n = \epsilon(x) = \epsilon(u_1)$ ist dann $u_t\epsilon(u_t^{-1}) \in GL_n(A)$ ebenfalls eine Homotopie von 1_n nach x. Somit gilt $[x] = [1_n]$, und folglich ist ι injektiv. $\square$
Ist $f : A \to B$ ein $*$-Homomorphismus, so erhalten wir in offensichtlicher Weise einen Homomorphismus $f_* : K_1(A) \to K_1(B)$. Man prüft leicht, dass K_1 auf diese Weise ein Funktor von der Kategorie der C^*-Algebren mit Werten in der Kategorie der abelschen Gruppen ist.

PROPOSITION 3.8. *Der Funktor* K_1 *ist homotopieinvariant.*

BEWEIS. Ist h_t eine Homotopie zwischen den $*$-Homomorphismen $h_0, h_1 : A \to B$ und $x \in GL_n(A)$, so liefert $h_t(x)$ eine Homotopie in $GL_n(B)$ zwischen $h_0(x)$ und $h_1(x)$. Somit $(h_0)_* = (h_1)_* : K_1(A) \to K_1(B)$. $\square$
Aus Lemma 3.6 und Proposition 3.7 ergibt sich insbesondere, dass wir $K_1(A)$ für allgemeines A durch

$$K_1(A) = \ker(\epsilon_* : K_1(A^+) \to K_1(\mathbb{C}))$$

beschreiben können. Ähnlich wie im Fall von K_0 hätten wir also die Gruppe $K_1(A)$ zunächst für unitale C^*-Algebren A definieren können, und dann die obige Beschreibung als Definition im nichtunitalen Fall verwenden können. Dies liefert allerdings keine wesentliche Vereinfachung.

4. Die Einhängung und höhere K-Theorie

In diesem Abschnitt definieren wir die Einhängung einer C^*-Algebra und ihre höhere K-Theorie und erhalten eine lange exakte Sequenz für Erweiterungen von C^*-Algebren.

PROPOSITION 3.9. *Sei*

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\iota} E \xrightarrow{\pi} Q \longrightarrow 0$$

eine Erweiterung von C^**-Algebren. Dann ist die induzierte Sequenz von abelschen Gruppen*

$$K_1(E) \xrightarrow{\pi_*} K_1(Q) \xrightarrow{\mathrm{ind}} K_0(I) \xrightarrow{\iota_*} K_0(E) \xrightarrow{\pi_*} K_0(Q)$$

exakt.

Beweis. Nach Proposition 3.7 können wir $K_1(E)$ und $K_1(Q)$ durch $K_1(E^+)$ und $K_1(Q^+)$ ersetzen. Seien $u_0, u_1 \in GL_n(Q^+)$ homotop. Eine Homotopie $(u_t)_{t\in[0,1]}$ zwischen u_0 und u_1 können wir als invertierbares Element u in $GL_n(C([0,1],Q^+))$ auffassen. Wählen wir einen Lift $\hat{u} \in GL_{2n}(C([0,1],E^+))$ für $\mathrm{diag}(u,u^{-1})$, so liefert die zugehörige Familie $(\mathrm{ind}(u_t))_{t\in[0,1]}$ eine Homotopie zwischen $\hat{u_0}\,\mathrm{diag}(1_n,0)\hat{u_0}^{-1}$ und $\hat{u_1}\,\mathrm{diag}(1_n,0)\hat{u_1}^{-1}$ in $M_{2n}(I^+)$. Hieraus folgt $\mathrm{ind}(u_0) = \mathrm{ind}(u_1)$. Also induziert die Indexabbildung $GL_\infty(Q^+) \to K_0(I)$ einen Homomorphismus $\mathrm{ind} : K_1(Q) \to K_0(I)$. Gilt $\mathrm{ind}([u]) = 0$ für $u \in GL_\infty(Q^+)$ so gibt es nach Satz 3.4 ein invertierbares Element $v \in GL_\infty(E^+)$ mit $\pi^+(v) = u$, umgekehrt gilt $\mathrm{ind}(\pi^+(v)) = 0$ für alle $v \in GL_\infty(E^+)$. Hieraus erhalten wir $\mathrm{im}(\pi_*) = \ker(\mathrm{ind})$, und die Behauptung folgt nun aus Satz 3.4. □

Sei A eine C^*-Algebra. Die Einhängung von A ist

$$\Sigma A = C_0(\mathbb{R}, A) = C_0(\mathbb{R}) \otimes A.$$

Beachte dass ΣA niemals unital ist, unabhängig davon ob A unital ist oder nicht.

Satz 3.10. *Sei A eine C^*-Algebra. Die Indexabbildung induziert einen Isomorphismus*

$$K_1(A) \cong K_0(\Sigma A).$$

Beweis. Wir betrachten die Einhängungserweiterung

$$0 \longrightarrow \Sigma A \xrightarrow{\iota} C((0,1],A) \xrightarrow{ev_1} A \longrightarrow 0$$

wobei wir $(0,1)$ mit $\mathbb{R}$ identifizieren. Nach Proposition 3.9 erhalten wir eine zugehörige exakte Sequenz

$$K_1(C((0,1],A)) \xrightarrow{(ev_1)_*} K_1(A) \xrightarrow{\mathrm{ind}} K_0(\Sigma A) \xrightarrow{\iota_*} K_0(C((0,1],A)) \xrightarrow{(ev_1)_*} K_0(A)$$

Da $C((0,1],A)$ kontrahierbar ist gilt $K_*(C((0,1],A)) = 0$ für $* = 0,1$ nach Proposition 2.26 und Proposition 3.8, und hieraus folgt die Behauptung. □

Wir erhalten als Folgerung insbesondere die folgenden Eigenschaften von K_1.

Satz 3.11. *Der Funktor K_1 ist halbexakt, splitexakt, stetig und stabil.*

Beweis. Halbexaktheit und Splitexaktheit folgen unmittelbar aus Satz 3.10 und Satz 2.28 sowie Satz 2.29. Für die übrigen Eigenschaften verwendet man Satz 3.10, die natürlichen Isomorphismen

$$\Sigma(\varinjlim A_n) \cong \varinjlim(\Sigma A_n)$$

für beliebige induktive Systeme $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von C^*-Algebren und

$$\Sigma(A \otimes \mathbb{K}(\mathcal{H})) = C_0(\mathbb{R}) \otimes A \otimes \mathbb{K}(\mathcal{H}) = (\Sigma A) \otimes \mathbb{K}(\mathcal{H})$$

für separable Hilberträume $\mathcal{H}$ sowie die Sätze 2.36 und 2.38. □

Ist A eine C^*-Algebra, so sei

$$\Sigma^n(A) = C_0(\mathbb{R}^n) \otimes A = C_0(\mathbb{R}^n, A)$$

die iterierte Einhängung von A. Wir definieren die höheren K-Gruppen von A durch

$$K_n(A) = K_0(\Sigma^n A) = K_0(C_0(\mathbb{R}^n, A)),$$

nach Satz 3.10 ist dies im Fall $n = 1$ verträglich mit der ursprünglichen Definition.

Satz 3.12. *Sei*

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\iota} E \xrightarrow{\pi} Q \longrightarrow 0$$

eine Erweiterung von C^*-Algebren. Dann erhalten wir eine lange exakte Sequenz

$$\cdots \longrightarrow K_{n+1}(Q) \xrightarrow{\partial} K_n(I) \xrightarrow{\iota_*} K_n(E) \xrightarrow{\pi_*} K_n(Q) \xrightarrow{\partial} \cdots$$

$$\cdots \xrightarrow{\iota_*} K_1(E) \xrightarrow{\pi_*} K_1(Q) \xrightarrow{\partial} K_0(I) \xrightarrow{\iota_*} K_0(E) \xrightarrow{\pi_*} K_0(Q)$$

von abelschen Gruppen.

Beweis. Nach Satz 3.10 können wir die exakte Sequenz aus Proposition 3.9 für die Erweiterung

$$0 \longrightarrow \Sigma^n I \xrightarrow{\iota} \Sigma^n E \xrightarrow{\pi} \Sigma^n Q \longrightarrow 0$$

in der Form

$$K_{n+1}(E) \xrightarrow{\pi_*} K_{n+1}(Q) \xrightarrow{\partial} K_n(I) \xrightarrow{\iota_*} K_n(E) \xrightarrow{\pi_*} K_n(Q)$$

schreiben. Die Behauptung ergibt sich, indem man die so entstehenden kurzen exakten Sequenzen zusammenfügt. $\square$

KAPITEL 4

Bott-Periodizität

In diesem Kapitel beweisen wir das zentrale Resultat in der K-Theorie für C^*-Algebren, die Bott-Periodizität. Für diesen Satz gibt es verschiedene Beweise, wir folgen einem eleganten Argument von Cuntz.

1. Tensorprodukte und Nuklearität

Im Beweis der Bott-Periodizität werden einige grundlegende Aussagen über C^*-Tensorprodukte und nukleare C^*-Algebren verwendet. In diesem Abschnitt stellen wir die benötigten Resultate zusammen, für die Beweise und weitergehende Details verweisen wir auf die Literatur [**7**], [**9**].
Seien A und B C^*-Algebren. Im allgemeinen gibt es auf dem algebraischen Tensorprodukt $A \odot B$ viele verschiedene C^*-Normen. Um die minimale Norm zu definieren, wähle treue Darstellungen $\pi_A : A \to \mathbb{L}(\mathcal{H}_A)$ und $\pi_B : B \to \mathbb{L}(\mathcal{H}_B)$. Dann gibt es einen injektiven $*$-Homomorphismus $\pi : A \odot B \to \mathbb{L}(\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B)$ mit $\pi(a \otimes b) = \pi_A(a) \otimes \pi_B(b)$ und

$$||x||_{\min} = ||\pi(x)||$$

für $x \in A \odot B$ heißt die minimale C^*-Norm auf $A \odot B$. Ein wichtiger Satz von Takesaki besagt, dass $|| \; ||_{\min}$ die kleinste C^*-Norm auf dem algebraischen Tensorprodukt ist. Wir schreiben $A \otimes B$ für die Vervollständigung von $A \odot B$ bezüglich der minimalen C^*-Norm.
Die maximale C^*-Norm auf $A \odot B$ ist

$$||x||_{\mathsf{max}} = \sup\{||\pi(x)|| \, |\pi : A \odot B \to \mathbb{L}(\mathcal{H}) \ast\text{-Homomorphismus}\}.$$

Aus der Definition sieht man leicht, dass $|| \; ||_{\mathsf{max}}$ die größte C^*-Norm auf $A \odot B$ ist. Wir schreiben $A \otimes_{\mathsf{max}} B$ für die Vervollständigung von $A \odot B$ bezüglich der maximalen C^*-Norm.

Definition 4.1. *Eine C^*-Algebra A heißt nuklear, wenn es für jede C^*-Algebra B eine eindeutig bestimmte C^*-Norm auf dem algebraischen Tensorprodukt $A \odot B$ gibt.*

Eine C^*-Algebra A ist genau dann nuklear, wenn der kanonische Homomorphismus $A \otimes_{\mathsf{max}} B \to A \otimes B$ ein Isomorphismus ist für alle C^*-Algebren B.
Alle endlichdimensionalen C^*-Algebren sind nuklear. Außerdem verbt sich Nuklearität auf induktive Limiten. Insbesondere ist $\mathbb{K}(\mathcal{H})$ nuklear für jeden separablen Hilbert-raum $\mathcal{H}$.
Ein grundlegendes Resultat über Tensorprodukte ist folgender Satz.

Satz 4.2 (Takesaki). *Alle kommutativen C^*-Algebren sind nuklear.*

Für Ideale und Quotienten gelten folgende Vererbungseigenschaften.

Proposition 4.3. *Sei*

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow E \longrightarrow Q \longrightarrow 0$$

eine Erweiterung von C^*-Algebren.

a) Ist E nuklear, so sind auch I und Q nuklear.
a) Sind I und Q nuklear, so ist auch E nuklear.

Ein Vorteil des maximalen Tensorprodukts ist seine Verträglich mit Erweiterungen von C^*-Algebren.

PROPOSITION 4.4. *Sei A eine C^*-Algebra und*

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\iota} E \xrightarrow{\pi} Q \longrightarrow 0$$

eine Erweiterung von C^*-Algebren. Dann ist

$$0 \longrightarrow A \otimes_{\mathsf{max}} I \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes_{\mathsf{max}} \iota} A \otimes_{\mathsf{max}} E \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes_{\mathsf{max}} \pi} A \otimes_{\mathsf{max}} Q \longrightarrow 0$$

ebenfalls eine Erweiterung von C^*-Algebren.

Die analoge Aussage für das minimale Tensorprodukt gilt nicht. Eine C^*-Algebra A heißt exakt, wenn das minimale Tensorprodukt mit A beliebige Erweiterungen von C^*-Algebren erhält.

2. Die Toeplitzalgebra

In diesem Abschnitt definieren wir die Toeplitzalgebra $\mathcal{T}$ und beweisen ihre universelle Eigenschaft. Die Toeplitzalgebra spielt eine wichtige Rolle im Beweis der Bott-Periodizität in Abschnitt 3.
Betrachte den Shiftoperator $S : l^2(\mathbb{N}_0) \to l^2(\mathbb{N}_0)$ gegeben durch

$$S(e_n) = e_{n+1}$$

für die Standard-Basisvektoren von $l^2(\mathbb{N})$. Dieser Operator ist eine Isometrie, es gilt also $S^*S = 1$. Allerdings ist S nicht unitär, genauer gilt $SS^* = 1 - e_{00}$, wobei $e_{00} \in \mathbb{K}(l^2(\mathbb{N}))$ die Projektion auf den ersten Basisvektor e_0 bezeichnet.

DEFINITION 4.5. *Die Toeplitzalgebra $\mathcal{T}$ ist die von S erzeugte Unter-C^*-Algebra von $\mathbb{L}(l^2(\mathbb{N}_0))$, also $\mathcal{T} = C^*(S)$.*

Man beachte, dass $\mathcal{T}$ unital ist wegen $S^*S = 1 \in \mathcal{T}$.
Für unsere folgenden Überlegungen ist es nützlich eine etwas andere Beschreibung dieser Algebra anzugeben. Sei $T = S^1 \subset \mathbb{C}$ die Menge der komplexen Zahlen von Betrag 1. Wie üblich identifizieren wir $l^2(\mathbb{Z})$ mit $L^2(T)$ über $u : l^2(\mathbb{Z}) \to L^2(T), u(e_n) = z^n$. Dann entspricht $l^2(\mathbb{N}_0) \subset l^2(\mathbb{Z})$ dem Hardyraum

$$H = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n | (a_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \in l^2(\mathbb{N}_0)) \right\}.$$

Ist $f \in C(T)$, so operiert f auf $L^2(T)$ durch Multiplikation. Man erhält also $M_f \in \mathbb{L}(L^2(T))$ durch

$$M_f(h)(z) = f(z)h(z).$$

Ist $p : L^2(T) \to H$ die orthogonale Projektion, so heißt der Operator $T_f \in \mathbb{L}(H)$ gegeben durch

$$T_f = pM_f p$$

der Toeplitzoperator mit Symbol $f \in C(T)$. Unter der kanonischen Identifizierung $H \cong l^2(\mathbb{N}_0)$ entspricht T_z genau dem Shiftoperator S. Es gilt daher $\mathcal{T} \cong C^*(T_z)$.

LEMMA 4.6. *Es gilt $T_{z^n} = (T_z)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $T_{\overline{f}} = (T_f)^*$ sowie $T_f T_g - T_{fg} \in \mathbb{K}(H)$ für alle $f, g \in C(T)$.*

Beweis. Offenbar gilt $T_{z^0} = \mathrm{id} = (T_z)^0$. Da H invariant unter M_z ist und erhält man $T_z = PM_zP = M_zP$ und somit

$$(T_z)^n = PM_zPM_zP\cdots PM_z = PM_{z^n}P = T_{z^n}$$

für alle $n > 0$.
Für $\xi, \eta \in H$ und $f \in C(T)$ gilt weiter

$$\langle \xi, (T_f)^*(\eta)\rangle = \langle T_f(\xi), \eta\rangle = \int_T \overline{f(t)\xi(t)}\eta(t)dt = \langle \xi, T_{\overline{f}}(\eta)\rangle$$

und somit $T_{\overline{f}} = (T_f)^*$.
Schließlich berechnen wir

$$T_fT_g - T_{fg} = PM_fPM_gP - PM_fM_gP = PM_f(P-1)M_gP$$

für $f, g \in C(T)$. Es genügt also zu zeigen, dass $PM_f(1-P)$ kompakt ist für alle $f \in C(T)$. Für $f = z^n$ ist

$$PM_{z^n}(1-P)\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m z^m\right) = P\left(\sum_{m=-\infty}^{-1} a_m z^{m+n}\right)$$
$$= \begin{cases} 0 & n \leq 0 \\ \sum_{m=-n}^{0} a_m z^{m+n} & n > 0 \end{cases}$$

ein Operator von endlichem Rang. Auf diese Weise erhalten wir $PM_f(1-P) \in \mathbb{K}(H)$ für alle trigonometrischen Polynome $f(z) = \sum_{n=-N}^{N} f_n z^n$. Da die trigonometrischen Polynome in $C(T)$ dicht liegen nach dem Satz von Stone-Weierstraß folgt hieraus die Behauptung. □
Ist $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $T \in \mathbb{L}(\mathcal{H})$ so bezeichnen wir mit $||T||_e$ die essentielle Norm von T, also die Norm von $T + \mathbb{K}(\mathcal{H})$ in $\mathbb{L}(\mathcal{H})/\mathbb{K}(\mathcal{H})$.

Lemma 4.7. *Sei $f \in C(T)$. Dann gilt $||T_f||_e = ||T_f|| = ||M_f|| = ||f||$.*

Beweis. Da die Multiplikationsdarstellung $C(T) \to \mathbb{L}(L^2(T))$ treu ist gilt $||M_f|| = ||f||$, und wir erhalten die Abschätzung

$$||T_f||_e \leq ||T_f|| = ||pM_fp|| \leq ||M_f|| = ||f||.$$

Für die umgekehrte Abschätzung sei $\epsilon > 0$, und es sei

$$\xi = \sum_{k=-N}^{N} a_k z^k \in L^2(T)$$

ein Element mit $||\xi||_2 = 1$ und $||M_f(\xi)||_2 > ||f|| - \epsilon$. Ein solcher Vektor existiert, da die trigonometrischen Polynome dicht in $L^2(T)$ liegen. Weiter sei

$$M_f(\xi) = f\xi = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k z^k$$

die Fourierzerlegung von $M_f(\xi)$. Für $n > N$ gilt $z^n\xi \in H$ und

$$T_f(z^n\xi) = pfz^n\xi = pz^nf\xi = \sum_{k=-n}^{\infty} b_k z^{k+n}.$$

Wir erhalten folglich

$$\lim_{n\to\infty} ||T_f(z^n\xi)||_2 = ||f\xi||_2 > ||f|| - \epsilon$$

und somit $||T_f|| > ||f|| - \epsilon$. Da $\epsilon > 0$ beliebig war folgt hieraus $||T_f|| \geq ||f||$. Die Folge $(z^n\xi)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert sogar schwach gegen Null in $L^2(T)$, und daher

$||K(z^n\xi)||_2 \to 0$ für alle $K \in \mathbb{K}(H) \subset \mathbb{K}(L^2(T))$. Wähle $K \in \mathbb{K}(H)$ mit $||T_f + K|| \leq ||T_f||_e + \epsilon$. Dann erhalten wir

$$||T_f||_e + \epsilon \geq \lim_{n\to\infty} ||(T_f + K)(z^n\xi)||_2 = \lim_{n\to\infty} ||T_f(z^n\xi)||_2 = ||f\xi||_2 > ||f|| - \epsilon,$$

und da $\epsilon > 0$ beliebig war somit $||T_f||_e \geq ||f||$. $\square$

Wir erinnern kurz an die universelle Eigenschaft der C^*-Algebra $C(T)$. Für jede unitale C^*-Algebra B und jedes unitäre Element $u \in B$ gibt es genau einen $*$-Homomorphismus $\phi : C(T) \to B$ mit $\phi(z) = u$. Dies folgt unmittelbar aus dem Funktionalkalkül, wenn man beachtet, dass $\mathrm{Spec}_B(u) \subset T$ gilt. In der Tat erhält man ϕ aus der Einschränkungsabbildung $C(T) \to C(\mathrm{Spec}_B(u))$.

Alternativ kann man auch den kanonischen Isomorphismus $C(T) \cong C^*(\mathbb{Z})$ verwenden; die universelle Eigenschaft ergibt sich dann leicht aus der Definition der Gruppen-C^*-Algebra $C^*(\mathbb{Z})$ von $\mathbb{Z}$.

PROPOSITION 4.8. *Es existiert eine kurze exakte Sequenz*

$$0 \longrightarrow \mathbb{K}(H) \longrightarrow \mathcal{T} \xrightarrow{q} C(T) \longrightarrow 0$$

von C^*-Algebren.

BEWEIS. Nachrechnen zeigt, dass

$$T_z^m(1 - T_zT_z^*)(T_z^*)^n = e_{mn}$$

für $m, n \in \mathbb{N}_0$ der Elementaroperator

$$e_{mn}(z^k) = \delta_{nk}z^m$$

in $\mathbb{K}(H)$ ist. Hieraus erhalten wir $\mathbb{K}(H) \subset \mathcal{T}$, und da $\mathbb{K}(H)$ offenbar ein Ideal ist können wir den Quotienten $\mathcal{T}/\mathbb{K}(H)$ betrachten. Es sei $q : \mathcal{T} \to \mathcal{T}/\mathbb{K}(H)$ die Quotientenabbildung. Die C^*-Algebra $\mathcal{T}/\mathbb{K}(H)$ wird durch $q(T_z)$ erzeugt, und wegen $1 - T_zT_z^* \in \mathbb{K}(H)$ ist $q(T_z) \in \mathcal{T}/\mathbb{K}(H)$ unitär. Nach der universellen Eigenschaft von $C(T)$ erhalten wir daher einen surjektiven $*$-Homomorphismus $\phi : C(T) \to \mathcal{T}/\mathbb{K}(H)$ mit $\phi(z) = q(T_z) = T_z + \mathbb{K}(H)$. Aus Lemma 4.6 folgt $\phi(f) = T_f + \mathbb{K}(H)$ für alle $f \in C(T)$, und mit Lemma 4.7 ergibt sich hieraus

$$||\phi(f)|| = ||T_f||_e = ||f||.$$

Also ist ϕ injektiv ist und folglich $\mathcal{T}/\mathbb{K}(H) \cong C(T)$. $\square$

Aus Proposition 4.8 und Proposition 4.3 folgt insbesondere, dass die Toeplitzalgebra $\mathcal{T}$ nuklear ist.

SATZ 4.9 (Wold-Zerlegung). *Sei $\mathcal{H}$ eine Hilbertraum und $v \in \mathbb{L}(\mathcal{H})$ eine Isometrie. Dann gibt es eine direkte Summenzerlegung*

$$\mathcal{H} \cong \mathcal{K} \oplus \bigoplus_{j\in J} l^2(\mathbb{N})$$

von Hilberträumen so dass v unter dieser Identifizierung die Form

$$v = u \oplus \bigoplus_{j\in J} S$$

mit einem unitären Operator $u \in \mathbb{L}(\mathcal{K})$ hat.

BEWEIS. Da v^n eine Isometrie ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ und Bilder von Isometrien abgeschlossen sind, erhalten wir einen abgeschlossenen Teilraum $\mathcal{K} \subset \mathcal{H}$ durch

$$\mathcal{K} = \bigcap_{n=0}^{\infty} v^n(\mathcal{H}).$$

Es gilt $v(\mathcal{K}) \subset \mathcal{K}$, also ist $\mathcal{K}$ invariant unter v. Offenbar ist die Einschränkung von v auf $\mathcal{K}$ surjektiv, und da v eine Isometrie ist somit $v : \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ unitär.

Sei weiter $\mathcal{L} = (1 - vv^*)(\mathcal{H})$ und e^j für $j \in J$ eine Orthonormalbasis von $\mathcal{L}$. Wir setzen $e_n^j = v^n(e^j)$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Da v isometrisch ist, bilden die Vektoren e_n^j für $j \in J$ und festes n eine Orthonormalbasis von $v^n(\mathcal{L})$. Weiter gilt $v^m(\mathcal{L}) \perp v^n(\mathcal{L})$ für $m \neq n$. Denn sind $v^m(\xi) \in v^m(\mathcal{L})$ und $v^n(\eta) \in v^n(\mathcal{L})$ und ohne Einschränkung $m > n$, so erhält man

$$\langle v^m(\xi), v^n(\eta)\rangle = \langle v^{m-n}\xi, \eta\rangle = 0$$

da $\eta \in \mathcal{L}$ orthogonal zu $v^{m-n}(\mathcal{H})$ steht.
Sei $\mathcal{L}^\infty \subset \mathcal{H}$ der von dem Orthogonalsystem e_n^j für $n \in \mathbb{N}_0$ und $j \in J$ aufgespannte abgeschlossene Unterraum. Offenbar wird $\mathcal{L}^\infty$ durch v in sich selbst abgebildet, genauer gilt

$$\mathcal{L}^\infty \cong \bigoplus_{j \in J} l^2(\mathbb{N}),$$

und v entspricht unter diesem Isomorphismus gerade der direkten Summe des Shiftoperators S.
Offenbar gilt $\mathcal{L}^\infty \perp \mathcal{K}$ wegen

$$\langle v^k(1 - vv^*)(\xi), v^l\eta\rangle = \langle (v^*)^{l-k}(1 - vv^*)(\xi), \eta\rangle = 0$$

für alle $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ und $l > k$. Hieraus folgt $\mathcal{L}^\infty \subset \mathcal{K}^\perp$.
Wir wollen zeigen dass $\mathcal{L}^\infty = \mathcal{K}^\perp$ gilt. Angenommen $\xi \in \mathcal{H}$ ist orthogonal zu $v^n(\mathcal{L})$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Wir zeigen mit Induktion, dass dann $\eta \in v^k(\mathcal{H})$ gilt für alle $k \geq 0$. Für $k = 0$ ist dies offensichtlich wahr. Angenommen wir haben bereits $\xi \in v^k(\mathcal{H})$ gezeigt. Schreiben wir $\xi = v^k(\eta)$, so gilt nach Voraussetzung an ξ die Bedingung $v^k(\eta) \perp v^k(\mathcal{L})$. Folglich $\eta \in \mathcal{L}^\perp = v(\mathcal{H})$, also $\xi \in v^{k+1}(\mathcal{H})$. Somit ergibt sich $\xi \in \mathcal{K}$.
Wir erhalten nun $\mathcal{H} = \mathcal{K} \oplus \mathcal{K}^\perp = \mathcal{K} \oplus \mathcal{L}^\infty$ wie gewünscht. □

Satz 4.10 (Coburn). *Die Toeplitzalgebra $\mathcal{T}$ ist die universelle C^*-Algebra erzeugt von einer Isometrie. Es gibt also für jede unitale C^*-Algebra B und jede Isometrie $v \in B$ genau einen $*$-Homomorphismus $\phi : \mathcal{T} \to B$ mit $\phi(S) = v$. Ist v eine echte Isometrie, so ist ϕ injektiv.*

Beweis. Da wir B als unitale Unter-C^*-Algebra von $\mathbb{L}(\mathcal{H})$ auffassen können für einen Hilbertraum $\mathcal{H}$, genügt es den Fall $B = \mathbb{L}(\mathcal{H})$ zu betrachten. Nach Satz 4.9 können wir

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{j \in J} \mathcal{H}_j, \qquad v = \bigoplus_{j \in J} v_j$$

schreiben mit Hilberträumen $\mathcal{H}_j$ und Operatoren $v_j \in \mathbb{L}(\mathcal{H}_j)$, so dass jedes v_j entweder unitär oder ein unilateraler Shift ist.
Ist v_j unitär, so erhält man $\phi_j : \mathcal{T} \to \mathbb{L}(\mathcal{H}_j)$ mit $\phi_j(S) = v_j$ durch Verknüpfen des zugehörigen $*$-Homomorphismus $C(S^1) \to \mathbb{L}(\mathcal{H}_j)$ mit der Projektion $q : \mathcal{T} \to C(S^1)$.
Ist v_j ein unilateraler Shift, so ist $C^*(v_j) \subset \mathbb{L}(\mathcal{H}_j)$ in natürlicher Weise isomorph zu $\mathcal{T}$, und wir erhalten einen injektiven $*$-Homomorphismus $\phi_j : \mathcal{T} \to \mathbb{L}(\mathcal{H}_j)$ mit $\phi_j(S) = v_j$.
Die direkte Summe der $*$-Homomorphismen ϕ_j liefert dann die gewünschte Abbildung ϕ. Da $\mathcal{T}$ von S erzeugt wird ist ϕ eindeutig bestimmt. Offenbar ist ϕ genau dann injektiv, wenn in der Zerlegung von v mindestens ein Shiftoperator auftritt. Dies ist genau dann der Fall wenn v selbst eine echte Isometrie ist. □
Betrachte die Verknüpfung $\epsilon = ev_1 \circ q : \mathcal{T} \to \mathbb{C}$ wobei $ev_1 : C(S^1) \to \mathbb{C}$ die Auswertung im Punkt $1 \in S^1$ ist. Wir definieren $\mathcal{T}_0 = \ker(\epsilon)$ und erhalten nach Konstruktion eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{T}_0 \longrightarrow \mathcal{T} \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{C} \longrightarrow 0.$$

Identifizieren wir $C_0(S^1 \setminus \{1\}) \cong C_0(\mathbb{R})$, so ergibt sich $\mathcal{T}_0 = q^{-1}(C_0(\mathbb{R}))$ und die kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathbb{K}(H) \longrightarrow \mathcal{T}_0 \xrightarrow{q} C_0(\mathbb{R}) \longrightarrow 0.$$

Man beachte wiederum, dass nach Proposition 4.3 alle C^*-Algebren in dieser Sequenz nuklear sind.
Im folgenden schreiben wir kurz $\mathbb{K}(H) = \mathbb{K}$ für die kompakten Operatoren auf dem Hardyraum H.

3. Bott-Periodizität

In diesem Abschnitt beweisen wir die Bott-Periodizität der K-Theorie. Dies ist eines der zentralen Resultate in der topologischen K-Theorie und der K-Theorie für C^*-Algebren.
Seien A und B C^*-Algebren. Zwei $*$-Homomorphismen $\phi_1, \phi_2 : A \to B$ heißen orthogonal, wenn $\phi_1(a_1)\phi_2(a_2) = 0$ gilt für alle $a_1, a_2 \in A$. In diesem Fall ist $\phi_1 + \phi_2$ ebenfalls ein $*$-Homomorphismus.
Wir erinnern, dass ein Funktor F auf der Kategorie der C^*-Algebren mit Werten in der Kategorie der abelschen Gruppen additiv heißt, wenn die kanonischen Abbildungen $\pi_j : A_1 \oplus A_2 \to A_j$ und $\iota_j : A_j \to A_1 \oplus A_2$ für $j = 1, 2$ einen Isomorphismus

$$F(A_1 \oplus A_2) \cong F(A_1) \oplus F(A_2)$$

induzieren für alle C^*-Algebren A_1, A_2. Jeder splitexakte Funktor ist insbesondere additiv.

Lemma 4.11. *Sei F ein additiver Funktor von der Kategorie der C^*-Algebren in die Kategorie der abelschen Gruppen und seien $\phi_1, \phi_2 : A \to B$ orthogonale $*$-Homomorphismen. Dann gilt*

$$F(\phi_1 + \phi_2) = F(\phi_1) + F(\phi_2).$$

Beweis. Da ϕ_1 und ϕ_2 orthogonal sind erhalten wir einen $*$-Homomorphismus $\phi_1 \oplus \phi_2 : A \oplus A \to B$ durch $(\phi_1 \oplus \phi_2)(a_1, a_2) = \phi_1(a_1) + \phi_2(a_2)$. Offenbar gilt dann

$$(\phi_1 \oplus \phi_2)\iota_j = \phi_j$$

für die Einbettungsabbildung $\iota_j : A \to A \oplus A$ in die j-te Komponente und

$$(\phi_1 \oplus \phi_2)\Delta = \phi_1 + \phi_2$$

wobei $\Delta : A \to A \oplus A, \Delta(a) = (a, a)$ die Diagonalabbildung ist.
Aus der Additivität von F folgt $F(\iota_1) + F(\iota_2) = F(\Delta)$, da beide Seiten mit $F(\pi_j)$ für $j = 1, 2$ verknüpft jeweils $F(\mathrm{id}_A)$ ergeben. Somit erhalten wir

$$F(\phi_1 + \phi_2) = F(\phi_1 \oplus \phi_2)F(\Delta) = F(\phi_1 \oplus \phi_2)(F(\iota_1) + F(\iota_2)) = F(\phi_1) + F(\phi_2)$$

wie gewünscht. □
Nach dieser Vorbereitung kommen wir nun zu folgendem Satz.

Satz 4.12 (Bott-Periodizität). *Für jede C^*-Algebra A gibt es einen natürlichen Isomorphismus*

$$K_1(\Sigma A) \cong K_0(A).$$

Beweis. Da die C^*-Algebren $\mathbb{K}, \mathcal{T}_0$ und $C_0(\mathbb{R})$ nuklear sind, erhalten wir nach Proposition 4.4 durch Tensorieren eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathbb{K} \otimes A \longrightarrow \mathcal{T}_0 \otimes A \xrightarrow{q \otimes \mathrm{id}} \Sigma A \longrightarrow 0$$

von C^*-Algebren. Die zugehörige lange exakte Sequenz liefert insbesondere eine kurze exakte Sequenz

$$K_1(\mathcal{T}_0 \otimes A) \xrightarrow{(q\otimes \mathrm{id})_*} K_1(\Sigma A) \xrightarrow{\mathrm{ind}} K_0(\mathbb{K} \otimes A) \longrightarrow K_0(\mathcal{T}_0 \otimes A)$$

Wegen der Stabilität von K_0 können wir $K_0(\mathbb{K} \otimes A)$ mit $K_0(A)$ identifizieren. Die Indexabbildung liefert dann einen Homomorphismus $\beta : K_1(\Sigma A) \to K_0(A)$. Um nachzuweisen, dass β ein Isomorphismus ist, genügt es offenbar

$$K_*(\mathcal{T}_0 \otimes A) = 0$$

für $* = 0, 1$ zu zeigen. Wir werden allgemeiner folgenden Satz beweisen.

SATZ 4.13. *Sei F ein homotopieinvarianter, splitexakter und stabiler Funktor von der Kategorie der C^*-Algebren in die Kategorie der abelschen Gruppen. Dann gilt*

$$F(\mathcal{T}_0 \otimes A) = 0$$

für jede C^*-Algebra A.

BEWEIS. Für die C^*-Algebra A betrachte den Funktor $F_A : C^*\text{-}\mathsf{Alg} \to \mathsf{Ab}$ gegeben durch

$$F_A(B) = F(B \otimes_{\mathsf{max}} A), \qquad F_A(f) = F(f \otimes_{\mathsf{max}} \mathrm{id}).$$

Man prüft leicht, dass F_A ebenfalls homotopieinvariant und stabil ist. Da das maximale Tensorprodukt nach Proposition 4.4 Erweiterungen erhält ist F_A auch splitexakt. Wegen

$$F_A(\mathcal{T}_0) = F(\mathcal{T}_0 \otimes A)$$

genügt es daher den Fall $A = \mathbb{C}$ zu betrachten.
Wir benötigen eine zusätzliche C^*-Algebra $E \subset \mathcal{T} \otimes \mathcal{T}$. Da das minimale Tensorprodukt injektive $*$-Homomorphismen erhält, ist $\mathbb{K} \otimes \mathcal{T}_0$ in natürlicher Weise eine Unter-C^*-Algebra von $\mathcal{T} \otimes \mathcal{T}$. Durch Multiplikation mit elementaren Tensoren prüft man, dass $\mathbb{K} \otimes \mathcal{T}_0 \subset \mathcal{T} \otimes \mathcal{T}$ sogar ein Ideal ist.
Wir definieren

$$E = \mathbb{K} \otimes \mathcal{T}_0 + \mathcal{T} \otimes 1 \subset \mathcal{T} \otimes \mathcal{T}.$$

Offenbar ist $E \subset \mathcal{T} \otimes \mathcal{T}$ eine Unter-$*$-algebra. Betrachte den $*$-Homomorphismus $\mathrm{id} \otimes \epsilon : \mathcal{T} \otimes \mathcal{T} \to \mathcal{T} \otimes \mathbb{C} \cong \mathcal{T}$. Dann gilt $(\mathrm{id} \otimes \epsilon)(\mathbb{K} \otimes \mathcal{T}_0) = 0$ und $(\mathrm{id} \otimes \epsilon)(x \otimes 1) = x$ für alle $x \in \mathcal{T}$. Also erhalten wir

$$\mathbb{K} \otimes \mathcal{T}_0 \cap \mathcal{T} \otimes 1 = 0$$

und eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathbb{K} \otimes \mathcal{T}_0 \longrightarrow E \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes \epsilon} \mathcal{T} \longrightarrow 0$$

welche durch den $*$-Homomorphismus $s : \mathcal{T} \to E, s(x) = x \otimes 1$ zerfällt. Insbesondere ist $E \subset \mathcal{T} \otimes \mathcal{T}$ abgeschlossen, also eine Unter-C^*-Algebra.
Wir bezeichnen mit $j : \mathcal{T} \to \mathcal{T} \otimes \mathcal{T}$ die Einbettungsabbildung gegeben durch

$$j(x) = e_{00} \otimes x.$$

Vorschalten der Inklusion $\mathcal{T}_0 \to \mathcal{T}$ liefert einen $*$-Homomorphismus $j^0 : \mathcal{T}_0 \to E$. Aus der Stabilität und Splitexaktheit von F folgt, dass j^0 eine injektive Abbildung $F(j^0) : F(\mathcal{T}_0) \to F(E)$ induziert. Es genügt daher zu zeigen, dass $F(j^0)$ die Nullabbildung ist, denn hieraus erhalten wir dann offenbar $F(\mathcal{T}_0) = 0$.
Betrachte die Isometrie $S \otimes 1$ in E. Konjugation mit dieser Isometrie liefert einen $*$-Homomorphismus $\mathrm{ad} : E \to E$, also

$$\mathrm{ad}(x) = (S \otimes 1)x(S^* \otimes 1)$$

für $x \in E$. Wir verknüpfen ad mit dem $*$-Homomorphismus $s : \mathcal{T} \to E$ und erhalten einen $*$-Homomorphismus $\phi_1 : \mathcal{T} \to E$ gegeben durch

$$\phi_1(x) = SxS^* \otimes 1.$$

Wegen

$$j(x)(S \otimes 1) = e_{00}S \otimes x = 0 = S^* e_{00} \otimes x = (S^* \otimes 1)j(x)$$

ist j orthogonal zu ϕ_1. Insbesondere liefert $\phi_0 = \phi_1 + j$ einen $*$-Homomorphismus $\phi_0 : \mathcal{T} \to \mathcal{T} \otimes \mathcal{T}$. Durch Vorschalten der Einbettungsabbildung $\mathcal{T}_0 \to \mathcal{T}$ erhalten wir aus ϕ_1 und ϕ_0 daher $*$-Homomorphismen $\phi_1^0, \phi_0^0 : \mathcal{T}_0 \to E$ mit $\phi_0^0 = \phi_1^0 + j^0$. Man beachte hier, dass die Abbildungen ϕ_0^i für $i = 0, 1$ in der Tat Werte in E annehmen, da j^0 Werte in E hat.
Nach Lemma 4.11 erhalten wir

$$F(\phi_0^0) = F(\phi_1^0) + F(j^0).$$

Es genügt daher zu zeigen, dass ϕ_0^0 und ϕ_1^0 homotop sind.
Wir wollen ϕ_0^0 und ϕ_1^0 fortsetzen zu unitalen $*$-Homomorphismen Φ_0 und Φ_1 von $\mathcal{T}$ nach $\mathcal{T} \otimes \mathcal{T}$. Hierzu genügt es nach der universellen Eigenschaft der Toeplitzalgebra, geeignete Isometrien S_0 und S_1 in $\mathcal{T} \otimes \mathcal{T}$ anzugeben. Betrachte

$$S_0 = SSS^* \otimes 1 + e_{00} \otimes S, \qquad S_1 = SSS^* \otimes 1 + e_{00} \otimes 1.$$

Mit $SSS^* = S(1 - e_{00})$ sowie $e_{00}S = 0 = S^* e_{00}$ prüft man

$$\begin{aligned} S_0^* S_0 &= ((1 - e_{00})S^* \otimes 1 + e_{00} \otimes S^*)(S(1 - e_{00}) \otimes 1 + e_{00} \otimes S) \\ &= (1 - e_{00}) \otimes 1 + e_{00} \otimes 1 = 1 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} S_1^* S_1 &= ((1 - e_{00})S^* \otimes 1 + e_{00} \otimes 1)(S(1 - e_{00}) \otimes 1 + e_{00} \otimes 1) \\ &= (1 - e_{00}) \otimes 1 + e_{00} \otimes 1 = 1. \end{aligned}$$

Wegen $\phi_1(S) = SSS^* \otimes 1$ und $j(S) = e_{00} \otimes S$ gilt $\Phi_0(S) = S_0 = \phi_1(S) + j(S)$. Somit erhalten wir $\Phi_0 = \phi_1 + j = \phi_0$, da beide Seiten $*$-Homomorphismen von $\mathcal{T}$ nach $\mathcal{T} \otimes \mathcal{T}$ liefern. Betrachten wir den $*$-Homomorphismus $\chi : \mathcal{T} \to \mathcal{T} \otimes \mathcal{T}$ gegeben durch $\chi(x) = e_{00} \otimes \epsilon(x)$, so ist χ orthogonal zu ϕ_1 wegen

$$\chi(x)(S \otimes 1) = e_{00}S \otimes \epsilon(x) = 0 = S^* e_{00} \otimes \epsilon(x) = (S^* \otimes 1)\chi(x).$$

Wegen $e_{00} \otimes 1 = e_{00} \otimes \epsilon(S)$ erhalten wir nun $\Phi_1 = \phi_1 + \chi$ in derselben Weise wie oben. Da χ auf $\mathcal{T}_0$ verschwindet sind somit Φ_0 und Φ_1 tatsächlich Fortsetzungen von ϕ_0^0 und ϕ_1^0.
Betrachte nun die Elemente

$$\begin{aligned} U_0 &= S^2(S^*)^2 \otimes 1 + e_{00}S^* \otimes S + Se_{00} \otimes S^* + e_{00} \otimes e_{00} \\ U_1 &= S^2(S^*)^2 \otimes 1 + e_{00}S^* \otimes 1 + Se_{00} \otimes 1 \end{aligned}$$

in $\mathcal{T} \otimes \mathcal{T}$. Man prüft leicht, dass U_0 und U_1 unitäre Operatoren sind mit $U_i^2 = 1$ für $i = 0, 1$. In der Tat sind U_0 und U_1 offenbar selbstadjungiert, und es gilt

$$\begin{aligned} U_0^2 &= (S^2(S^*)^2 \otimes 1 + e_{00}S^* \otimes S + Se_{00} \otimes S^* + e_{00} \otimes e_{00})^2 \\ &= S^2(S^*)^2 \otimes 1 + e_{00} \otimes SS^* + Se_{00}S^* \otimes 1 + e_{00} \otimes e_{00} \\ &= S(1 - e_{00})S^* \otimes 1 + e_{00} \otimes (1 - e_{00}) + Se_{00}S^* \otimes 1 + e_{00} \otimes e_{00} \\ &= SS^* \otimes 1 + e_{00} \otimes 1 = (1 - e_{00}) \otimes 1 + e_{00} \otimes 1 = 1 \otimes 1 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} U_1^2 &= (S^2(S^*)^2 \otimes 1 + e_{00}S^* \otimes 1 + Se_{00} \otimes 1)^2 \\ &= (S^2)(S^*)^2 \otimes 1 + e_{00} \otimes 1 + Se_{00}S^* \otimes 1 \\ &= S(1-e_{00})S^* \otimes 1 + e_{00} \otimes 1 + Se_{00}S^* \otimes 1 \\ &= SS^* \otimes 1 + e_{00} \otimes 1 = (1-e_{00}) \otimes 1 + e_{00} \otimes 1 = 1 \otimes 1. \end{aligned}$$

Offenbar ist U_1 in $E = \mathbb{K} \otimes \mathcal{T}_0 + \mathcal{T} \otimes 1$ enthalten. Wegen

$$\begin{aligned} U_0 &= S^2(S^*)^2 \otimes 1 + e_{00}S^* \otimes S + Se_{00} \otimes S^* + e_{00} \otimes e_{00} \\ &= S^2(S^*)^2 \otimes 1 + e_{00}S^* \otimes 1 + Se_{00} \otimes 1 \\ &\qquad + e_{00}S^* \otimes (S-1) + Se_{00} \otimes (S^*-1) + e_{00} \otimes e_{00} \end{aligned}$$

liegt auch U_0 in E.
Für $k = 0, 1$ und $t \in [0,1]$ betrachte nun den Operator $u_k(t) \in E$ gegeben durch

$$u_k(t) = \frac{1}{2}(1+U_k) - \frac{1}{2}\exp(\pi i t)(1-U_k).$$

Es gilt $u_k(0) = U_k$ und $u_k(1) = 1$ sowie

$$\begin{aligned} u_k(t)u_k(t)^* = u_k(t)^*u_k(t) &= \frac{1}{4}(1+U_k)^2 - \frac{1}{4}\exp(\pi i t)(1-U_k)(1+U_k) \\ &\qquad - \frac{1}{4}\exp(-\pi i t)(1-U_k)(1+U_k) + \frac{1}{4}(1-U_k)^2 \\ &= \frac{1}{4}(1+2U_k+1) + \frac{1}{4}(1-2U_k+1) = 1. \end{aligned}$$

Wir erhalten auf diese Weise stetige Pfade von unitären Operatoren in E zwischen U_k und 1 für $k = 0, 1$. Verknüpfen dieser Pfade liefert eine Homotopie von unitären Operatoren U_t in E die U_0 und U_1 verbindet. Wir können diese Homotopie alternativ als einen unitären Operator $U \in C([0,1], E)$ auffassen.
Mithilfe von U erhalten wir eine Isometrie $U(S \otimes 1)$ in $C([0,1], E)$. Hierbei schreiben wir kurz $S \otimes 1$ für die konstante Funktion auf $[0,1]$ mit Wert $S \otimes 1$. Wegen

$$S_0 = S^2S^* \otimes 1 + e_{00} \otimes S = U_0(S \otimes 1), \qquad S_1 = S^2S^* \otimes 1 + e_{00} \otimes 1 = U_1(S \otimes 1),$$

liefert der zugehörige $*$-Homomorphismus $\Phi : \mathcal{T} \to C([0,1], E)$ eine Homotopie Φ_t von Φ_0 nach Φ_1. Die Einschränkung von Φ_t auf $\mathcal{T}_0$ ist die gewünschte Homotopie zwischen ϕ_0^0 und ϕ_1^0. □
Wegen $K_1(\Sigma A) \cong K_0(\Sigma^2 A)$ können wir mithilfe der Bott-Periodizität die K-Theorie $K_*(A)$ einer C^*-Algebra A als eine $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-graduierte abelsche Gruppe auffassen.
Aus Satz 4.12 und Satz 3.12 erhalten wir unmittelbar folgendes Resultat.

Satz 4.14 (6-Term exakte Sequenz). *Sei*

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\iota} E \xrightarrow{\pi} Q \longrightarrow 0$$

eine Erweiterung von C^*-Algebren. Dann erhält man eine exakte Sequenz

$$\begin{tikzcd} K_0(I) \arrow[r, "\iota_*"] & K_0(E) \arrow[r, "\pi_*"] & K_0(Q) \arrow[d] \\ K_1(Q) \arrow[u] & K_1(E) \arrow[l, "\pi_*"] & K_1(I) \arrow[l, "\iota_*"] \end{tikzcd}$$

von abelschen Gruppen.

4. Einige Berechnungen

In diesem Abschnitt stellen wir einige einfache Berechnungen von K-Gruppen zusammen, die sich aus der Bott-Periodizität ergeben.

4.1. Die K-Theorie von $\mathbb{C}$. Wir haben bereits $K_0(\mathbb{C}) = \mathbb{Z}$ gesehen, und nach Lemma 3.6 gilt $K_1(\mathbb{Z}) = 0$. Also liefert Bott-Periodizität

$$K_n(\mathbb{C}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & n \text{ gerade} \\ 0 & n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

4.2. Die K-Theorie von $C_0(\mathbb{R}^m)$. In ähnlicher Weise erhalten wir

$$K_n(C_0(\mathbb{R}^m)) = \begin{cases} \mathbb{Z} & n-m \text{ gerade} \\ 0 & n-m \text{ ungerade.} \end{cases}$$

4.3. Die K-Theorie von Sphären. Für die m-Sphäre $S^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$ liefert die Auswertung ev_x an einem Punkt $x \in S^m$ eine zerfallende Erweiterung

$$0 \longrightarrow C_0(\mathbb{R}^m) \longrightarrow C(S^m) \xrightarrow{ev_x} \mathbb{C} \longrightarrow 0$$

von C^*-Algebren. Wegen der Splitexaktheit der K-Theorie erhält man aus dem vorherigen Beispiel somit

$$K_0(C(S^m)) = \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & m \text{ gerade} \\ \mathbb{Z} & m \text{ ungerade.} \end{cases}$$

und

$$K_1(C(S^m)) = \begin{cases} 0 & m \text{ gerade} \\ \mathbb{Z} & m \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Literaturverzeichnis

[1] J. F. Adams. Vector fields on spheres. *Ann. of Math. (2)*, 75:603–632, 1962.

[2] M. F. Atiyah and F. Hirzebruch. Riemann-Roch theorems for differentiable manifolds. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 65:276–281, 1959.

[3] M. F. Atiyah and F. Hirzebruch. Vector bundles and homogeneous spaces. In *Proc. Sympos. Pure Math., Vol. III*, pages 7–38. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1961.

[4] Bruce Blackadar. *K-theory for operator algebras*, volume 5 of *Mathematical Sciences Research Institute Publications*. Springer-Verlag, New York, 1986.

[5] Armand Borel and Jean-Pierre Serre. Le théorème de Riemann-Roch. *Bull. Soc. Math. France*, 86:97–136, 1958.

[6] R. Bott and J. Milnor. On the parallelizability of the spheres. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 64:87–89, 1958.

[7] Nathanial P. Brown and Narutaka Ozawa. *C^*-algebras and finite-dimensional approximations*, volume 88 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2008.

[8] J. Cuntz, R. Meyer, and J.M. Rosenberg. *Topological and bivariant K-theory*, volume 36 of *Oberwolfach Seminars*. Birkhäuser Verlag, Basel, 2007.

[9] Gerard J. Murphy. *C^*-algebras and operator theory*. Academic Press Inc., Boston, MA, 1990.

[10] M. Rørdam, F. Larsen, and N. Laustsen. *An introduction to K-theory for C^*-algebras*, volume 49 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, 2000.