

Beweistechniken - Übungsaufgaben

Alex Chmelnitzki

7. Mai 2005

1 Induktion

Wir definieren die Folgen a_n und b_n durch

$$a_0 = b_0 = 1$$

$$a_n = a_{n-1} + b_{n-1},$$

$$b_n = a_{n-1} \times b_{n-1}$$

Beweise, dass für zwei beliebige Elemente a_i, a_j der a-Folge der größte gemeinsame Teiler immer 1 ist! Man sagt dann, dass je zwei Elemente immer relativ prim zueinander sind.

2 Prinzip des größten/kleinsten Elements

Wir haben n Karten, von 1 bis n durchnummeriert und spielen damit folgendes „Spiel“:

Ein Zug besteht darin, dass wir uns zunächst die oberste Karte anschauen. Angenommen sie hat die Nummer k . Dann nehmen wir die obersten k Karten und legen sie in umgekehrter Reihenfolge zurück auf den Stapel. Das heißt, die oberste Karte kommt an die k -te Stelle im Stapel, die zweitoberste an die k -minus-erste Stelle und so weiter, schließlich kommt die k -te Karte ganz nach oben. Nun wiederholen wir das Ganze, indem wir uns die nun oberste Karte anschauen und wieder so viele Karten in der Reihenfolge umkehren, wie die Zahl auf dieser Karte anzeigt. Das setzen wir so fort.

Beweise, dass stets nach einer endlichen Anzahl von Zügen die Karte mit der Nummer 1 oben landen wird!

3 Invarianten

Man startet mit der Zahl 17 und kann bei jedem Zug wahlweise die Zahl mit 3 multiplizieren oder 6 subtrahieren. Zu welchen der folgenden drei Zahlen kann man durch eine endliche Anzahl von Schritten gelangen: 45, 46, 48? Begründe deine Antwort!

4 Färbungen

Kann man einen Raum mit folgendem Grundriss mit geraden Fliesen auslegen, von denen jede genau ein Quadrat breit und drei Quadrate lang ist? Begründe deine Antwort!

