

Scindements de Heegaard et groupe des homéotopies des petites variétés de Seifert

Michel Boileau¹ et Jean-Pierre Otal²

¹ Université Paul Sabatier, Département de Mathématiques, 118 route de Narbonne, F-31062 Toulouse, France

² Université Paris-Sud, Bâtiment 425, F-91405 Orsay Cedex, France

Oblatum 12-XI-1990

Soit M^3 une variété de dimension 3, fermée, connexe, orientable et irréductible. Un problème bien connu est de savoir si deux homéomorphismes de M homotopes sont nécessairement isotopes. On ne connaît pour l'instant aucun exemple de variété *irréductible* n'ayant pas cette propriété. Pour des exemples de variétés réductibles, on peut voir [19].

Waldhausen [46] a montré que cette propriété est vraie pour les variétés de Haken (c'est-à-dire irréductibles et suffisamment grandes). D'après la conjecture de Thurston, toute variété irréductible qui n'est pas de Haken devrait porter une structure hyperbolique à volume fini ou bien admettre une fibration de Seifert (c'est-à-dire un feuilletage par cercles avec toutes les feuilles d'holonomie finie).

Le cas des variétés hyperboliques qui ne sont pas de Haken est à notre connaissance toujours ouvert, excepté des résultats dans [4] et [23].

Dans le cas des variétés de Seifert, les seuls cas non couverts par le théorème de Waldhausen ont pour base S^2 et possèdent au plus 3 fibres exceptionnelles. Pour beaucoup de ces cas la propriété précédente a déjà été démontrée: les espaces lenticulaires [12, 22], les variétés ayant 3 fibres exceptionnelles d'ordre $(2, 2, n)$ [1, 32], celles ayant 3 fibres exceptionnelles d'ordre $(2, 3, 4)$ [4], la plupart de ces variétés à groupe fondamental infini [36].

En fait, les seules variétés de Seifert pour lesquelles le problème reste encore ouvert ont pour base S^2 et possèdent 3 fibres exceptionnelles d'ordre $(2, 3, p)$ (pour $p \geq 5$) et $(3, 3, q)$ (pour $q \geq 2$).

Ces variétés contiennent les variétés elliptiques (à groupe fondamental fini) du type tétraédrale $(3, 3, 2)$ et icosaédrale $(2, 3, 5)$ et en particulier la sphère de Poincaré.

Le but de cet article est de démontrer que l'homotopie implique l'isotopie pour les difféomorphismes de ces variétés, et donc d'achever la démonstration de cette propriété pour les variétés de Seifert.

Ceci entraîne que tout difféomorphisme de ces variétés est isotope à un difféomorphisme fibré et permet ainsi un calcul facile du groupe des homéotopies de ces variétés.

La démonstration repose sur l'étude des scindements de Heegaard de genre g d'une variété fermée connexe orientable M , c'est-à-dire d'une surface S^2 fermée, connexe, orientable, de genre g plongée dans M et séparant M en deux bretzels.

Les variétés de Seifert de base S^2 et ayant trois fibres exceptionnelles ont toujours un scindement de Heegaard de genre 2. Une façon d'en construire est la suivante (cf. [9, 5]): on considère le graphe formé par la réunion de deux fibres exceptionnelles et d'un arc qui les joint et se projette en un arc plongé dans la base. On vérifie alors aisément que le bord d'un voisinage régulier de ce graphe est un scindement de Heegaard de genre 2 dit «scindement vertical». Pour une variété de Seifert de base S^2 et ayant 3 fibres exceptionnelles, il existe, à isotopie près, au plus 3 scindements de Heegaard verticaux de genre 2.

Un des résultats principaux de cet article est:

Théorème 1 *Soit M une variété de Seifert de base S^2 ayant 3 fibres exceptionnelles. Tout scindement de Heegaard de genre 2 de M est isotope à l'un des trois scindements verticaux excepté dans les deux cas suivants:*

(i) M est la variété de Brieskorn

$$V(2, 3, a) = \{Z = (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 \mid z_1^2 + z_2^3 + z_3^a = 0, \|Z\| = 1\},$$

avec $\text{pgcd}(3, a) = 1$ et $a \geq 7$.

(ii) M est la variété algébrique

$$W(2, 4, b) = \{Z \in \mathbb{C}^3 \mid z_1^2 + (z_2^2 + z_3^{2b+1})z_2 = 0, \|Z\| = 1\}, \quad b \geq 2.$$

Dans ces cas-là, M admet un scindement de Heegaard de genre 2 supplémentaire, non homéomorphe à un scindement vertical.

Ce théorème est une étape cruciale pour la classification à isotopie près des scindements de Heegaard de genre 2 des variétés de Seifert de base S^2 ayant 3 fibres exceptionnelles, qui a été obtenue dans [5] et [27].

Pour les variétés de Seifert qui nous intéressent, on montrera qu'il existe toujours un scindement vertical de genre 2 qui est *caractéristique*: son image par un homéomorphisme ambiant lui est isotope (voir Corollaire 2.6).

En particulier, en utilisant [8], on obtient le corollaire suivant:

Corollaire 2 *Soit M une variété de Seifert elliptique ou euclidienne ayant 3 fibres exceptionnelles. Alors, M admet un scindement de Heegaard de genre 2 unique à isotopie près.*

Ce corollaire est à rapprocher des résultats de [44, 13, 7] pour l'unicité à isotopie près des scindements de Heegaard de genre g donné dans la sphère S^3 , les espaces lenticulaires et le tore T^3 . Cependant la question de l'unicité, à isotopie près, des scindements de Heegaard de genre $g > 2$ pour les variétés elliptiques et euclidiennes à 3 fibres exceptionnelles est encore ouvert.

A tout scindement de Heegaard de genre 2 d'une variété M est associé une involution τ qui fait de M un revêtement double de S^3 ramifié le long d'un entrelacs L (cf. [3, 42]).

Pour les variétés qui nous intéressent, la propriété du scindement de Heegaard de genre 2 d'être caractéristique (c'est-à-dire invariant, à isotopie près, par difféomorphisme φ de M (cf. Corollaire 2.6) permet de montrer qu'après

une isotopie tout homéomorphisme φ de M commute avec l'involution τ . Par passage au quotient, on se ramène ainsi à l'étude des homéomorphismes de la paire (S^3, L) .

En général, L est un entrelacs de Montesinos à trois branches. Dans le cas non-elliptique, le groupe des symétries $\pi_0 \text{Homéo}(S^3, L)$ a été calculé dans [10] (voir aussi [17], Chap. 12). Ce calcul montre que tout homéomorphisme de la paire (S^3, L) est isotope à un difféomorphisme respectant la fibration de Seifert d'orbifold induite par celle de M sur (S^3, L) .

Pour le cas des variétés elliptiques, on obtient le même résultat que dans [10] mais en utilisant le théorème d'uniformisation pour les orbifolds de dimension 3 dont le lieu de ramification est de dimension ≥ 1 , annoncé par Thurston [38, 39], pour obtenir la même conclusion (cf. [33]).

Cependant, dans le cas de la sphère de Poincaré $V(2, 3, 5)$ et plus généralement des variétés de Brieskorn $V(2, 3, a)$, $\text{pgcd}(a, 3) = 1$, $a \geq 3$, L est un noeud torique $(3, a)$, dont le complémentaire $S^3 \setminus L$ porte une fibration de Seifert. En utilisant alors certains résultats de [45], on peut simplifier la preuve en évitant d'utiliser les résultats de Thurston dans ce cas là.

Du fait que tout difféomorphisme de la paire (S^3, L) est isotope à un difféomorphisme respectant la fibration de Seifert quotient, on déduit que tout difféomorphisme de M est isotope à un difféomorphisme fibré.

En considérant l'action du difféomorphisme sur la base S^2 , on a alors :

Théorème 3 *Soit M une variété de Seifert de base S^2 ayant 3 fibres exceptionnelles d'ordres $(2, 3, p)$, $p \geq 5$ ou $(3, 3, q)$, $q \geq 2$. Alors, tout difféomorphisme de M homotope à l'identité est isotope à l'identité.*

En particulier, on obtient le résultat suivant qui a été utilisé par Viro [43] pour construire une famille infinie de variétés simplement connexes de dimension 4, ayant peu d'homologie, dont le bord est la sphère de Poincaré et qui sont toutes homéomorphes mais pas difféomorphes.

Corollaire 4 *Tout difféomorphisme de la sphère de Poincaré est isotope à l'identité.*

Remarque. La preuve du Théorème 3 se généralise sans difficulté à toutes les variétés de Seifert de base S^2 ayant 3 fibres exceptionnelles en utilisant le Théorème 1. Cependant cette preuve, dans beaucoup de cas, utilise le théorème d'hyperbolisation de Thurston pour les variétés Haken [38, 39] ce qui la rend beaucoup moins élémentaire que la preuve de Scott [36] déjà connue dans ces cas là.

Le plan de l'article est le suivant :

Dans le premier paragraphe, on démontre que, sous certaines hypothèses, on peut toujours pousser une fibre exceptionnelle sur un scindement de Heegaard d'une variété de Seifert de base S^2 ayant 3 fibres exceptionnelles.

Dans le second paragraphe, on applique le résultat du paragraphe précédent au scindement de Heegaard de genre 2 pour démontrer le Théorème 1 et le Corollaire 2.

Dans le troisième paragraphe, on utilise le Corollaire 2.6 obtenu au paragraphe précédent pour démontrer le Théorème 3 et le Corollaire 4.

Le dernier paragraphe contient le résultat d'unicité des présentations en ponts des entrelacs toriques généralisés de S^3 , qu'on utilise de façon cruciale dans le second paragraphe.

1 Mise en bonne position d'un scindement de Heegaard par rapport à une fibration de Seifert

Dans notre cas, une variété de Seifert est une variété orientée fermée connexe qui admet une action différentiable du cercle. A une telle variété on associe un système d'invariants $(g; e_0; \beta_1/\alpha_1, \dots, \beta_r/\alpha_r)$ où g est le genre de la base (espace des orbites), $e_0 \in \mathbb{Q}$ est la classe d'Euler rationnelle de la fibration et les fractions $\beta_i/\alpha_i \in (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^*$, $1 \leq i \leq r$, caractérisent l'holonomie des fibres exceptionnelles. En particulier on supposera toujours β_i premier avec α_i et $\alpha_i > 1$ (cf. [35], ou [36] pour les notations fractionnaires).

La variété M est déterminée à homéomorphisme orienté près par ses invariants de Seifert (cf. [35]). Réciproquement, le type topologique orienté de M détermine, à homéomorphisme près, la fibration de Seifert (et donc ses invariants), si $g > 0$ ou si M admet au moins 3 fibres exceptionnelles [45, 28].

Dans cet article, nous considérons la variété de Seifert de base S^2 et ayant 3 fibres exceptionnelles. Une telle variété de Seifert de base S^2 et ayant 3 fibres exceptionnelles. Une telle variété de Seifert sera notée $S(0; e_0; \beta_1/\alpha_1; \beta_2/\alpha_2; \beta_3/\alpha_3)$ avec $\text{pgcd}(\beta_i, \alpha_i) = 1$ et $\alpha_i > 1, i = 1, 2, 3$.

Soit Σ^2 un scindement de Heegaard de genre g de la variété $M = S(0, e_0; \beta_1/\alpha_1, \beta_2/\alpha_2, \beta_3/\alpha_3)$. Soit $L = f_1 \cup f_2 \cup f_3$ l'entrelacs de M formé de la réunion des 3 fibres exceptionnelles f_1, f_2 et f_3 d'ordre respectif $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

Ce paragraphe est consacré à la preuve de résultat suivant :

Proposition 1.1 *Si M ne contient pas de surface de genre $\leq (g-1)/2$, transverse à la fibration de Seifert, alors après une isotopie de L on peut supposer que l'une de ses composantes connexes f_i est contenue dans Σ .*

La preuve de cette proposition utilise un anneau singulier contenu dans M dont la frontière s'identifie à l'une des composantes de L , par exemple f_1 , et que nous décrivons maintenant. Soit π la projection de M sur l'espace des fibres, homéomorphe à S^2 ; soit x_1 l'image par π de la fibre singulière F_1 d'ordre α_1 . Il existe un arc k de S^2 , unique à isotopie près, plongé dans son intérieur, qui sépare l'image des deux autres fibres exceptionnelles et dont les extrémités s'identifient à x_0 (cf. Fig. 1). L'image réciproque $\pi^{-1}(k)$ est un anneau singulier A homéomorphe au 2-complexe suivant. Soit S^1 le cercle unité de \mathbb{C} ; l'anneau singulier A est homéomorphe au quotient de l'anneau $R = S^1 \times [0, 1]$ par la relation d'équivalence qui identifie $(x, 0)$ à $(x, 1)$ et $(x, 0)$ à $(e^{\frac{2i\pi}{\alpha_1} x}, 0)$. Le lieu

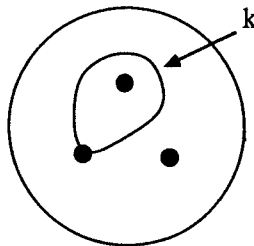


Fig. 1

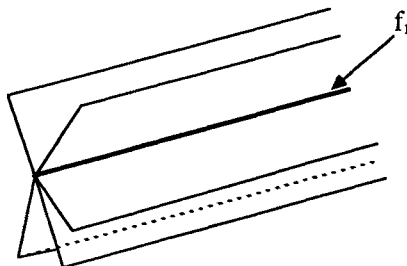


Fig. 2

singulier de A s'identifie à la fibre f_1 . L'allure locale de l'anneau A près de sa frontière f_1 est formée de $2\alpha_1$ feuilletés selon le modèle de la Fig. 2.

Soit $\varphi: R \rightarrow A$ la projection canonique. On dira qu'un arc δ tracé sur A est *essentiel* si sa préimage $\varphi^{-1}(\delta)$ dans R contient un arc *non séparant*. Dans le cas contraire l'arc δ sera dit *inessentiel*.

On se donne tout d'abord une fonction de Morse ordonnée h définie sur M dont les singularités sont un point critique d'indice 0, g points critiques d'indice 1, g points critiques d'indice 2, un point critique d'indice 3, et telle que Σ soit une surface de niveau de h séparant les singularités d'indice 0 ou 1 de celles d'indice 2 ou 3.

Soit L un plongement dans M de l'entrelacs $f_1 \cup f_2 \cup f_3$, isotope à l'inclusion canonique, tel que la restriction de h à L soit une fonction de Morse avec $2b$ points critiques et que la fonction h n'ait pas de singularités dans M sur les niveaux compris entre les extrema de la restriction de h à L . Si de plus les niveaux critiques de la restriction de h à L sont distincts, le plongement de L sera dit *générique* pour la fonction de Morse h .

Soient $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_{2b-1}$ des surfaces de niveau de h séparant les niveaux critiques de la restriction de h à L ; d'après nos conditions chaque surface Σ_i est isotope au scindement Σ .

Suivant Gabai [20], on définit l'épaisseur de l'entrelacs L comme l'entier

$$E(L) = \sum_{i=1}^{2b-1} \frac{1}{2} \text{Card}(\Sigma_i \cap L),$$

où $\text{Card}(\Sigma_i \cap L)$ désigne le nombre de points d'intersections de Σ_i avec L .

Un plongement générique L de $f_1 \cup f_2 \cup f_3$ dans M sera dit *en position mince par rapport à h* s'il minimise l'épaisseur $E(L)$ parmi les plongements génériques qui lui sont isotopes.

Lorsque la variété M ne contient pas de surface incompressible de genre $\leq \frac{g-1}{2}$, pour démontrer la Proposition 1.1, on raisonne par l'absurde en supposant que sa conclusion n'est pas vérifiée, c'est-à-dire qu'on fait l'hypothèse: (H) « aucune composante de L ne peut être isotopée sur S ».

Sous cette hypothèse on a alors:

Lemme 1.2 *Sous l'hypothèse (H), il existe une surface de niveau de h isotope à Σ , transverse à L et à l'intérieur de l'anneau singulier A , dont l'intersection avec A ne contient que des arcs essentiels sur A et des courbes fermées homotopes à zéro sur A .*

Preuve du Lemme 1.2. La preuve de ce lemme est analogue à celle du Lemme 4.4 de [20].

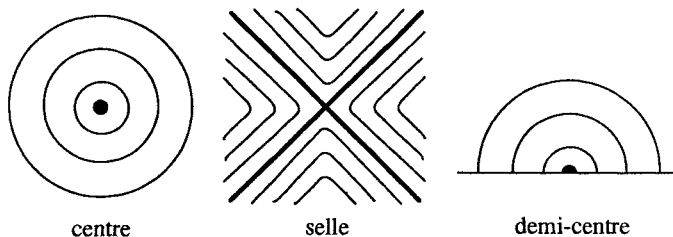


Fig. 3

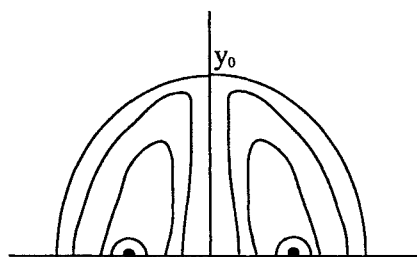


Fig. 4

Tout d'abord, on isotope L en position mince par rapport à h . Par une isotopie de A respectant L on peut supposer que la restriction de h à A est une fonction de Morse dont les singularités sont situées à des niveaux distincts, et distincts en outre des niveaux des singularités de la restriction de h à la frontière f_1 de A . On peut aussi imposer que l'allure de A près des singularités de f_1 soit du type maximum local pour chaque feuillet.

Les courbes de niveau de la fonction $h \circ \varphi$ définissent alors un feuilletage de Morse \mathcal{F} de l'anneau R dont les singularités sont de l'un des trois types suivants (cf. Fig. 3).

Nous commençons par décrire dans la remarque ci-dessous une configuration du feuilletage \mathcal{F} qui permettrait de réduire l'épaisseur sur le scindement Σ , ce qui n'est pas possible d'après toutes nos hypothèses.

Remarque 1.3 Supposons qu'il existe (cf. Fig. 4) un point selle y_0 de \mathcal{F} et trois courbes de niveau $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ issues de y_0 , ayant les deux propriétés suivantes:

- (i) Les trois extrémités y_i de δ_i sont situées sur une même composante connexe du bord ∂R de R .
- (ii) Il existe sur ∂R deux arcs k_1 et k_2 , d'intérieurs disjoints, avec $\partial k_1 = y_1 \cup y_2$ et $\partial k_2 = y_2 \cup y_3$ tels que la restriction de $h \circ \varphi$ à k_j n'a qu'un seul point critique pour $j = 1, 2$.

Si la restriction de φ à $k_1 \cup k_2$ est un plongement sur son image $\varphi(k_1 \cup k_2)$ alors on peut réduire l'épaisseur de L .

En effet, soit Δ le disque contenu dans R et bordé par $k_1 \cup k_2 \cup \delta_1 \cup \delta_3$. Par une isotopie de support le disque $\varphi(\Delta)$, on fait glisser l'arc $\varphi(k_1 \cup k_2)$ sur

$\varphi(\delta_1 \cup \delta_3)$. Cette isotopie de f_1 , qui fixe $f_2 \cup f_3$, a pour effet de réduire l'épaisseur de L de 2.

Si la restriction de φ à $k_1 \cup k_2$ n'est pas injective, comme la restriction de φ à l'intérieur $\text{Int}(k_1 \cup k_2)$ est un plongement nécessairement $\varphi(y_1) = y_3$.

Comme précédemment on isotope la fibre f_1 sur la courbe fermée $\delta_1 \cup \delta_3$. Comme la surface de niveau de h contenant $\delta_1 \cup \delta_3$ est isotope à Σ , on contredit ainsi l'hypothèse (H).

Cette remarque à les deux conséquences importantes suivantes:

- (1) Toute feuille de \mathcal{F} qui est une courbe fermée est homotope à zéro sur R . Dans le cas contraire, comme il y a un nombre pair non nul de singularités du type demi-centre sur chaque composante connexe de ∂R , on voit facilement apparaître la configuration décrite dans la Remarque 1.3.
- (2) Soit δ un arc inessentiel de l'anneau R , contenu dans une feuille du feuilletage \mathcal{F} contenant peut être une singularité. L'arc δ découpe R en deux composantes dont l'une A est un disque: alors la fonction $h \circ \varphi$ a un seul point critique sur l'arc $A \cap \partial R$. En effet, l'existence d'au moins deux points critiques de $h \circ \varphi$ fait apparaître la configuration décrite dans la Remarque 1.3.

Un tel arc δ est dit *néгатif* (resp. *positif*) si la singularité de la fonction $h \circ \varphi$ sur l'arc $A \cap \partial R$ est un minimum (resp. un maximum).

Soit α_0 le niveau du plus haut minimum de la restriction de h à F_1 et α_1 celui de son maximum immédiatement supérieur à α_0 .

On définit les deux sous-ensembles suivants S^+ et S^- de l'intervalle $]\alpha_0, \alpha_1[$: S^+ (resp. S^-) est l'ensemble des valeurs $\alpha \in]\alpha_0, \alpha_1[$ telles que la surface de niveau $h^{-1}(\alpha)$ contienne un arc inessentiel positif (resp. négatif).

D'après l'allure locale de A au voisinage de F_1 (cf. Fig. 3), S^+ contient un voisinage de α_1 et S^- contient un voisinage de α_0 .

On a alors comme dans [20, Lemma 4.4] les deux affirmations suivantes:

Affirmation 1 $S^+ \cap S^- = \emptyset$.

Preuve. Dans le cas contraire, on trouve deux disques Δ^+ et Δ^- plongés dans A , associés à des arcs inessentiel δ^+ et δ^- situés sur une même surface de niveau.

Si $\Delta^+ \cap \Delta^-$ est soit vide, soit réduite à un point ou à l'un des deux arcs δ^+ ou δ^- , par glissement on peut comme dans [20, Lemme 4.4] réduire l'épaisseur de f_1 ce qui contredit le fait que f_1 est en position mince.

Sinon, l'intersection $\Delta^+ \cap \Delta^-$ contient une selle et on voit apparaître la configuration décrite dans la Remarque 1.3, ce qui est impossible. \square

Affirmation 2 S^+ et S^- sont fermés dans $]\alpha_0, \alpha_1[$.

Preuve. En effet, d'après la première conséquence de la Remarque 1.3, toutes les courbes fermées de \mathcal{F} sont homotopes à zéro sur R et une limite d'arcs inessentiels s'accumule donc sur un arc inessentiel (mais contenant peut-être une singularité de \mathcal{F}). \square

Il découle de ces deux affirmations que $]\alpha_0, \alpha_1[- \{S^+ \cup S^-\}$ est un ouvert *non vide*. Toute surface de niveau générique $\Sigma_\alpha = h^{-1}(\alpha)$ pour α pris dans cet ouvert satisfait alors les conclusions du Lemme 1.2. \square

La surface de niveau fournie par le Lemme 1.2 étant isotope à Σ , on la note encore Σ .

L'intersection $\Sigma \cap A$ est alors formée d'un graphe Γ (non nécessairement connexe) et de courbes fermées. Soit $N(A)$ un petit voisinage régulier de A , dont l'intersection avec Σ contient un voisinage $N(\Gamma)$ de Γ .

Le bord de $N(A)$ est la réunion de deux tores, bordant chacun un tore solide T_2 ou T_3 dont l'âme est isotope respectivement aux fibres exceptionnelles f_2 et f_3 .

L'hypothèse (H), qu'aucune composante connexe de L ne peut être isotopée sur Σ entraîne:

Lemme 1.4 *Sous l'hypothèse (H), le bord $N(\Gamma)$ dans Σ ne contient que des méridiens de T_2 ou T_3 .*

Preuve. Remarquons tout d'abord que chaque courbe de $N(\Gamma)$ n'est pas homotope à zéro sur le tore ∂T_2 ou ∂T_3 . En effet, une telle courbe est homotope dans $N(A)$ à une réunion d'arcs qui sont essentiels sur A , d'après le Lemme 1.2.

Soit γ une courbe de $N(\Gamma)$ située par exemple sur ∂T_2 . Supposons, par l'absurde, que γ n'est pas isotope au méridien de T_2 . Dans ce cas elle est homotope à une puissance k -ième, **non nulle**, de la fibre f_2 . Plus précisément, il existe une application ρ de l'anneau $R = S^1 \times [0, 1]$ dans T_2 ayant les propriétés suivantes:

- (i) $\rho(S^1 \times \{0\}) = \gamma$ et $\rho(S^1 \times \{1\}) = f_2$.
- (ii) La restriction de ρ à $S^1 \times [0, 1[$ est un plongement dont l'image est disjointe de f_2 .
- (iii) La restriction de ρ à $S^1 \times \{1\}$ est un revêtement à k feuillettes de f_2 .

L'affirmation suivante termine alors la preuve du Lemme 1.4.

Affirmation 1.5 *Dans les conditions ci-dessus, il existe une isotopie de L qui, ou bien réduit la minceur de L , ou bien permet de pousser la fibre f_2 sur Σ .*

Preuve. On isotope tout d'abord l'application ρ de sorte que la restriction de ρ à $S^1 \times \{0\}$ soit transverse à la surface de niveau Σ de γ , et que $h \circ \rho$ soit une fonction de Morse sur R avec des singularités à des niveaux distincts. On impose aussi la même allure locale près des singularités de f_2 que dans le Lemme 1.2.

En considérant le feuilletage de Morse induit sur R par les courbes de niveau de $h \circ \rho$, on observe alors facilement l'existence d'une selle faisant apparaître la configuration décrite dans la Remarque 1.3. On conclut alors par le même raisonnement.

Fin de la preuve de la Proposition 1.1. Rappelons tout d'abord le résultat bien connu suivant: une surface incompressible proprement plongée dans un tore solide est une réunion d'anneaux non homotopes à zéro et de disques.

On distingue alors 3 cas suivant le nombre des composantes connexes de Γ .

1er cas: le graphe de Γ est connexe. Il résulte du Lemme 1.4 et de la remarque ci dessus que si chaque composante connexe de $\Sigma \cap T_i$ ($i=2, 3$) n'est pas un disque, la surface $\Sigma \cap T_i$ est compressible dans T_i ($i=2, 3$).

En effet $\Sigma \cap \partial T_i$ ($i=2, 3$) est formé de deux types de courbes:

- (a) celles qui appartiennent à $N(\Gamma)$ et sont isotopes sur ∂T_i à des méridiens d'après le Lemme 1.4;

(b) les autres courbes qui sont homotopes à zéro sur ∂T_i , car elles sont homotopes dans $N(A)$ à des courbes fermées sur A et disjointes d'un arc essentiel de A .

Dans le cas où $\Sigma \cap T_i (i=2, 3)$ est compressible, par des chirurgies sur $\Sigma \cap T_i$ le long de disques, on transforme Σ en une collection de surfaces dont la somme lui est homologue (lorsqu'on s'est donné une orientation de Σ). En particulier, cette somme est homologue à zéro.

Cette collection de surface est formée d'une part de surfaces fermées contenues dans T_2 ou T_3 et de sphères rencontrant ∂T_2 ou ∂T_3 en une courbe fermée; d'autre part, d'après la connexité de Γ , d'une seule surface Σ' dont l'intersection avec $N(A)$ est uniquement formée de méridiens de T_2 ou de T_3 .

Comme les premières surfaces sont homologues à zéro, la surface Σ' est elle-même homologue à zéro.

Pour conclure, on utilise alors:

Affirmation 1.6 *On peut isotoper la surface Σ' pour qu'elle soit transverse à la fibration de Seifert de M .*

Preuve. Tout d'abord $\Sigma' \cap N(A)$ est contenue dans $\Sigma \cap N(A)$; donc par construction la fibration de Seifert de M est transverse à Σ' dans un voisinage de $\Sigma' \cap N(A)$. Chaque composante connexe de $\Sigma' \cap T_i (i=2$ ou $3)$ est un disque méridien de T_i . La fibration de Seifert de M étant déjà transverse à ce disque près de son bord, une isotopie de $\Sigma' \cap T_i$, constante près de $\Sigma' \cap \partial T_i$ rend cette surface transverse à la fibration de Seifert de T_i , pour $i=2$ ou 3 .

En recollant les isotopies de T_2 et T_3 , on obtient la situation cherchée. \square

Dans le cas où Γ , donc Σ' , est connexe, l'affirmation ci-dessus fournit la contradiction cherchée: une surface Σ' **connexe**, transverse à une fibration de Seifert ne peut être homologue à zéro (c'est-à-dire séparer la variété) si l'espace des fibres est orientable.

L'hypothèse (H) n'est donc pas vérifiée dans ce cas.

2e cas: le graphe a Γ au moins 3 composantes connexes. Par le même raisonnement que dans le 1er cas, on construit des surfaces connexes $\Sigma'_1, \dots, \Sigma'_k (k \geq 3)$ contenant chacune exactement une composante connexe de Γ et dont l'intersection avec $N(A)$ est uniquement formée de méridiens de T_2 ou de T_3 .

L'affirmation 1.6 permet par une isotopie de les rendre transverses à la fibration de Seifert de M .

Si l'une de ces surfaces Σ'_k est homologue à zéro, on obtient la même contradiction que précédemment.

Sinon elles sont toutes incompressibles, chacune étant la fibre d'une fibration de M sur le cercle. Puisque $k \geq 3$ et genre $(\Sigma'_1) + \dots + \text{genre}(\Sigma'_k) \leq g$, l'une d'elles au moins Σ'_{k_0} a un genre $g(\Sigma'_{k_0}) < (g-1)/2$, ce qui contredit l'hypothèse faite sur M dans la Proposition 1.1.

3e cas: le nombre de composantes connexes est 2. Considérons d'abord le cas où $(A \cap \Sigma) - \{\Gamma\}$ contient une courbe fermée qui est homotope à zéro sur Σ . Soit alors γ une courbe plus intérieure ayant cette propriété, au sens que le disque D de bord γ contenu dans Σ ne contient pas de courbe fermée de $A \cap \Sigma - \{\Gamma\}$ dans son intérieur. D'après la Remarque 1.3, la courbe γ borde aussi un disque Δ sur A .

Si l'intersection $\overset{\circ}{D} \cap A$ est vide, on peut isotoper Σ par une isotopie à support dans un voisinage de D , de façon à éliminer la courbe d'intersection γ .

Sinon $\hat{D} \cap A$ contient au moins une composante connexe de Γ . Toutefois d'après le Lemme 1.2, l'intersection $\hat{D} \cap \hat{A}$ est vide. Alors, en appliquant à la sphère $D \cap A$ un raisonnement analogue à celui appliqué à Σ dans les deux premiers cas, on obtient une sphère transverse à la fibration de Seifert, ce qui contredit soit l'orientabilité de la base de la fibration, soit l'irréductibilité de M .

Par applications successives de ce raisonnement, on se ramène au cas où les courbes d'intersection de $A \cap \Sigma - \{\Gamma\}$ ne sont pas homotopes à zéro sur Σ .

Comme dans les deux premiers cas, si $\Sigma \cap T_i$ est compressible, pour $i=2$ ou 3, on fait alors une chirurgie sur $\Sigma \cap T_i$ le long d'un disque de compression. Le raisonnement précédent montre que le bord de ce disque est une courbe essentielle γ sur Σ .

Si γ ne sépare pas Σ , la nouvelle surface obtenue $\tilde{\Sigma}$ est toujours séparante, et de genre $g-1$.

Le raisonnement des deux premiers cas appliqué à $\tilde{\Sigma}$, permet de construire alors deux surfaces connexes, contenant chacune une composante connexe de Γ et transverses à la fibration de Seifert de M .

Si une de ces surfaces ne sépare pas M , on contredit alors l'orientabilité de la base de la fibration de Seifert de M .

Sinon, l'une de ces surfaces au moins est de genre $\leq (g-1)/2$, ce qui contredit l'hypothèse de la Proposition 1.1.

Si la courbe γ sépare Σ et si l'une des deux surfaces obtenues est de genre $< g/2$, on conclut alors de la même façon.

Il reste donc à considérer le cas où les deux surfaces obtenues Σ'_1 et Σ'_2 sont de genre $g/2$. On peut supposer que chacune d'elles contient l'une des deux composantes de Γ .

Par une isotopie de Σ'_1 et de Σ'_2 , on élimine les courbes d'intersection de $\Sigma'_j \cap A$, $j=1, 2$ qui sont homotopes à zéro sur Σ'_j . On voit alors que les composantes de $\Sigma'_j \cap T_2$ et $\Sigma'_j \cap T_3$ ($j=1, 2$) sont incompressibles, sinon on pourrait trouver une surface transverse à la fibration de Seifert de genre $\leq g/2 - 1$.

Chaque Σ'_j , $j=1, 2$ peut donc, par une isotopie, être rendue transverse à la fibration de Seifert. A cause de l'orientabilité de la base de la fibration, aucune des deux surfaces Σ'_j ne sépare M . De plus, elles sont parallèles dans M par un parallélisme obtenu en suivant les fibres de la fibration de Seifert de M .

Or, par construction, le scindement de Heegaard Σ est obtenu à partir de Σ'_1 et Σ'_2 , en les joignant par un tube ∂T , où T est une 1-anse $D^2 \times [0, 1]$ avec $\Sigma'_1 \cap T = D^2 \times \{0\}$ et $\Sigma'_2 \cap T = D^2 \times \{1\}$.

Un calcul de groupe fondamental montre que l'un des côtés de la surface Σ ainsi décrite ne peut pas être un bretzel, et donc ceci contredit le fait que Σ est un scindement de Heegaard.

L'hypothèse (H) est contredite dans tous les cas considérés, ce qui démontre la Proposition 1.1. \square

2 Scindements de Heegaard de genre 2 des petites variétés de Seifert

Dans ce paragraphe, on donne la démonstration du Théorème 1 ainsi que des corollaires permettant d'assurer l'existence de scindements de Heegaard de genre 2 caractéristiques dans les petites variétés de Seifert qui nous intéressent.

Preuve du Théorème 1. Soit Σ un scindement de Heegaard de genre 2 qui découpe M en deux bretzels H_1 et H_2 . D'après la Proposition 1.1, on peut supposer que l'une des fibres exceptionnelles, par exemple f_1 , est contenue dans la surface Σ .

Soit $N(f_1)$ un petit voisinage fibré de f_1 qui intersecte la surface Σ en un anneau; la surface $\Sigma - \overset{\circ}{N}(f_1) = \Sigma_1$ a une ou deux composantes connexes et est bordée par deux courbes parallèles sur Σ à la fibre f_1 .

On a alors:

Lemme 2.1 *Dans notre situation, l'un des deux cas (a) ou (b) est toujours vérifié:*

(a) *Il existe un disque méridien pour l'un des bretzels bordé par Σ , qui rencontre f_1 transversalement en un seul point.*

(b) *La surface $\Sigma_1 = \Sigma - \overset{\circ}{N}(f_1)$ est incompressible dans $M_1 = M - \overset{\circ}{N}(f_1)$.*

Preuve. Si le cas (b) n'est pas vérifié, le lemme de Dehn implique l'existence d'un disque de compression D pour la surface Σ_1 dans M_1 qui est proprement plongé dans H_1 ou H_2 , par exemple H_1 . De plus le bord de D , non homotope à zéro dans Σ_1 , n'est pas homotope à zéro dans Σ et n'est pas parallèle à une courbe du bord de Σ_1 , car la fibre f_1 n'est pas homotope à zéro dans M .

Considérons alors la surface obtenue par chirurgie sur Σ le long de D . L'une des composantes connexes de cette surface est un tore T , qui contient $\Sigma \cap N(f_1)$ et qui borde un tore solide V . L'anneau $T - \overset{\circ}{N}(f_1)$ est incompressible dans $M_1 = M - N(f_1)$ car le générateur de son groupe fondamental est homotope à la fibre f_1 .

Si cet anneau est compressible vers le bord, il existe un disque D' proprement plongé dans V et ayant les propriétés suivantes: $\partial D' = k_1 \cup k_2$, avec $k_1 \subset \Sigma \cap N(f_1)$ et $k_2 \subset T - \overset{\circ}{N}(f_1)$, chacun des arcs k_i , $i = 1, 2$ étant essentiel dans l'anneau qui le contient. En particulier après une isotopie de $k_1 \cup k_2$, l'intersection $(k_1 \cup k_2) \cap f_1$ est réduite à un point d'intersection transverse.

Ce disque nous met alors dans la situation du premier cas.

Sinon l'anneau $T - \overset{\circ}{N}(f_1)$ est incompressible vers le bord dans M_1 .

Puisque M_1 est une variété de Seifert à bord incompressible, de base un disque, et admettant deux fibres exceptionnelles, un tel anneau est unique à isotopie près dans M_1 d'après [45]. Il s'agit donc de l'anneau $A \cap M_1$ où A est l'anneau singulier décrit dans la preuve de la Proposition 1.1.

Une telle situation est impossible car sinon l'une des fibres exceptionnelles, par exemple f_2 , serait contenue dans le tore solide V , et donc f_1 et f_2 commuteraient dans $\pi_1 M$. Ceci est impossible car M n'est pas un espace lenticulaire. \square

Nous allons maintenant montrer que le cas (a) correspond aux scindements de Heegaard verticaux tandis que le cas (b) correspond aux scindements «exceptionnels».

Cas a: Scindement de Heegaard verticaux

Il existe un disque méridien D pour l'un des bretzels bordé par Σ , par exemple H_1 , qui rencontre f_1 en un seul point.

Après avoir poussé f_1 dans l'intérieur de H_1 à l'aide d'un voisinage collier de Σ , l'existence du disque D entraîne que la surface Σ définit un scindement

de Heegaard de la variété à bord $M_1 = M - \mathring{N}(f_1)$, où $N(f_1)$ est un petit voisinage fibré de f_1 contenu dans l'intérieur de H_1 . En effet la composante connexe de $M_1 - \Sigma$ différente de H_2 est diffeomorphe au bretzel creux $T^2 \times [0, 1] \# (D^2 \times S^1)$.

D'après la classification à isotopie près des scindements de Heegaard de genre 2 pour la variété M_1 effectuée dans [8], la surface Σ est isotope à l'un des scindements verticaux décrits dans l'introduction.

Cas b: La surface $\Sigma_1 = \Sigma - \mathring{N}(f_1)$ est incompressible dans la variété $M_1 = M - \mathring{N}(f_1)$

Tout d'abord on voit que la surface Σ_1 est incompressible vers le bord dans M_1 , sinon d'après l'argument utilisé dans le Lemme 2.1 on est dans le cas (a).

D'après Waldhausen [45], la surface Σ_1 est isotope à une surface transverse à la fibration de Seifert de M_1 . Cette surface est homéomorphe au tore avec deux trous, ou à deux copies du tore avec un trou.

Dans la première hypothèse, on aurait une surface connexe transverse à la fibration de Seifert de M_1 et qui sépare M_1 . Ceci contredirait à nouveau l'orientabilité de l'espace des fibres de la variété M_1 , cette fois homéomorphe au disque D^2 .

Dans la seconde hypothèse, la variété M_1 est fibrée sur le cercle S^1 avec pour fibre l'une quelconque des deux composantes f_1 ou f_2 de Σ_1 . Les surfaces f_1 et f_2 sont alors isotopes par une isotopie qui consiste à suivre la fibre de la fibration de Seifert de M_1 . On en déduit que le scindement Σ est isotope au bord d'un voisinage régulier du tore troué F_1 bordé par f_1 dans M . Un tel scindement Σ sera dit «horizontal».

La détermination des variétés de Seifert de base S^2 ayant 3 fibres exceptionnelles et admettant un scindement de Heegaard de genre 2 horizontal, découle du lemme suivant :

Lemme 2.2 *Une variété de Seifert de base S^2 ayant 3 fibres exceptionnelles qui admet un scindement de Heegaard horizontal de genre 2 est un revêtement à deux feuilles de S^3 ramifié le long d'un entrelacs L à trois ponts formé de fibres d'une fibration de Seifert de S^3 . De plus, deux tels scindements de Heegaard horizontaux de genre 2 sont isotopes dans M .*

Preuve. Soit Σ un scindement de Heegaard horizontal de genre 2 pour M .

Soit τ l'involution de Weierstrass sur Σ . Cette involution s'étend des deux côtés en une involution τ sur M .

Le quotient M/τ s'obtient en recollant les quotients H_1/τ et H_2/τ de chaque bretzel le long de leur bord. Il s'agit donc de la sphère S^3 et l'image dans S^3 des points fixes de τ est un entrelacs L qui admet une présentation à 3 ponts (cf. [3, 42]).

Nous allons montrer que L est un entrelacs torique.

L'involution de Weierstrass τ respecte, à isotopie près, toute courbe simple fermée sur Σ , car Σ est de genre 2. En particulier, après une isotopie de la fibration de Seifert de M , on peut supposer que $\tau(f_1) = f_1$. Donc, si $N(f_1)$ est un petit voisinage fibré invariant par τ de f_1 , l'involution τ respecte la variété $M_1 = M - \mathring{N}(f_1)$.

D'après [11, 41], après une isotopie de la fibration de Seifert de M_1 , qui s'étend à M , on peut supposer que τ respecte la fibration de Seifert de M_1 et donc s'étend en une involution fibrée de M .

D'après l'étude du cas (b), la variété M_1 est fibrée sur le cercle, de fibre un tore troué F_1 et on peut supposer que $\Sigma \cap M_1$ est la réunion de deux copies parallèles $F_1 \cup F_2$ de F_1 .

D'après [45], la projection $\pi: M_1 \rightarrow D_2$ de M_1 sur la base de la fibration de Seifert induit sur chaque copie F_i , $i=1, 2$, un revêtement ramifié sur la base D^2 de la fibration.

Puisque τ respecte l'orientation de Σ , τ induit sur la base de la fibration un homéomorphisme qui conserve l'orientation. En particulier, τ respecte l'orientation des fibres de la fibration de Seifert de M_1 et donc de M .

En particulier, les points fixes de τ sont constitués d'un nombre fini de fibres de la fibration.

Le quotient M/τ est la sphère S^3 munie de la fibration de Seifert induite par celle de M . L'image L des points fixes de τ dans S^3 est alors la réunion d'un nombre fini de fibres de cette fibration de S^3 .

Il s'agit là d'un entrelacs *torique généralisé* (cf. [16]).

On peut maintenant décrire les variétés de Seifert ayant 3 fibres exceptionnelles qui admettent un scindement de Heegaard horizontal de genre 2 (cf. [26]).

(1) L est le noeud torique $(3, a)$, $a \geq 4$ et $\text{pgcd}(a, 3)=1$, alors M est la variété de Brieskorn:

$$V(2, 3, a) = S \left(0; -\frac{1}{6a}; \frac{1}{2}, \frac{(-a)^{-1}}{3}, \frac{(6)^{-1}}{a} \right)$$

si a est impair;

$$V(2, 3, 2a) = S \left(0; \frac{1}{3a}; \frac{(-a')^{-1}}{3}, \frac{(-a')^{-1}}{3}, \frac{(3)^{-1}}{a'} \right)$$

si a est pair.

(2) L est la réunion du noeud torique $(2, 2b+1)$ et de la fibre exceptionnelle d'ordre 2 de la fibration de Seifert de S^3 correspondante. Alors M est la variété

$$W(2, 4, b) = S \left(0; -\frac{1}{4b}; \frac{1}{2}, \frac{(-b)^{-1}}{4}, \frac{(4)^{-1}}{2b+1} \right).$$

(3) L est la réunion de l'entrelacs torique $(2, c)$ et de la fibre exceptionnelle d'ordre c de la fibration de Seifert de S^3 correspondante. Alors, M est la variété

$$\text{de Seifert elliptique } S \left(0; 1; \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{c} \right).$$

(4) L est un entrelacs torique $(3, 3, d)$. Alors, M est une variété de Seifert ayant 4 fibres exceptionnelles, ce qui exclut ce cas.

La démonstration précédente montre que les involutions τ et τ' associées à deux scindements de Heegaard Σ et Σ' horizontaux de genre 2 sont conjuguées par un homéomorphisme isotope à l'identité dans M . Après isotopie, on peut donc supposer que Σ et Σ' sont respectés par la même involution τ .

Le fait que les deux scindements horizontaux Σ et Σ' sont isotopes dans M découle alors du fait que leur image Σ/τ et Σ'/τ dans $S^3 = M/\tau$ définissent deux sphères de présentation à 3 ponts de l'entrelacs torique généralisé L , qui sont isotopes par une isotopie respectant L , comme il sera montré dans le Paragraphe 4.

Ceci termine la démonstration du Lemme 2.2. \square

Pour achever la démonstration du Théorème 1, il nous faut tout d'abord montrer :

Lemme 2.3 *Soit M une variété de Seifert $V(2, 3, a)$, $\text{pgcd}(3, a)=1$, $a \geq 7$ ou $W(2, 4, b)$, $\text{pgcd}(2, b)=1$, $b \geq 2$. Alors le scindement de Heegaard horizontal n'est jamais homéomorphe à un scindement vertical.*

Preuve. Comme dans [2], nous allons montrer que les deux involutions associées respectivement à un scindement de Heegaard de genre 2 horizontal et vertical ne sont pas conjuguées dans M (cf. aussi [3, 42]).

Pour cela, nous décrivons maintenant l'involution associée à un scindement vertical.

Soit Σ un scindement vertical et τ l'involution de M induite par l'involution de Weierstrass sur Σ .

Comme Σ induit un scindement de Heegaard de genre 2 de $M_1 = M - \mathring{N}(f_1)$, cette involution respecte M_1 . Comme dans la preuve du Lemme 2.1, après une isotopie de la fibration de Seifert de M_1 , qui s'étend à M , on peut supposer que τ respecte la fibration de Seifert de M .

Comme τ renverse l'orientation des âmes des anses de chaque bretzel découpé par Σ , τ renverse l'orientation des fibres exceptionnelles de M . Donc τ induit sur la base une symétrie de S^2 par rapport à un cercle qui contient les 3 fibres exceptionnelles.

Il s'agit là des involutions décrites et étudiées par Montesinos ([25, 26], cf. [17, Ch. 12]).

L'image L des points fixes de τ dans le quotient M/τ est alors un entrelacs de Montesinos à 3 branches ([17, Ch. 12]).

Une telle involution de Montesinos τ n'est jamais conjuguée à une involution τ' associée au scindement de Heegaard horizontal pour les variétés considérées. En effet, la fibre ordinaire f de la fibration de M engendre le centre infini cyclique du groupe fondamental $\pi_1 M$. Si τ_* et τ'_* sont les automorphismes de $\pi_1 M$ induits par τ et τ' , on a $\tau_*(f) = f^{-1}$ et $\tau'_*(f) = f$, car le centre $\langle f \rangle$ est caractéristique et l'involution de Montesinos renverse l'orientation des fibres tandis que τ' , d'après le Lemme 2.2, conserve cette orientation.

Comme dans les cas considérés dans le Lemme 2.3, f est d'ordre infini dans $\pi_1 M$, les deux involutions ne peuvent pas être conjuguées dans M . \square

La fin de la preuve du Théorème 1 est donnée par :

Lemme 2.4 *Dans les variétés de Seifert elliptiques $V(2, 3, a)$, $a=4, 5$, $W(2, 4, 3)$ et $S\left(0; 1; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{c}\right)$, le scindement de Heegaard de genre 2 horizontal est isotope à un scindement vertical.*

Preuve. Pour ces variétés elliptiques, il est facile de vérifier que l'involution de Montesinos τ_v est conjuguée à l'involution τ_h associé au scindement de Heegaard horizontal de genre 2.

En effet, les entrelacs de Montesinos obtenus dans S^3 comme image des points fixes de τ_h sont dans ce cas là des entrelacs toriques généralisés (cf. [14, 26, 33]).

Pour démontrer le Lemme 2.4, on va montrer que τ_h est conjuguée à τ_v par un homéomorphisme isotope à l'identité.

Après une isotopie, on pourra alors supposer que les scindements verticaux et horizontaux sont respectés par la même involution τ_h par exemple. Leurs images dans $M/\tau_h = S^3$ sont alors deux sphères de présentation à 3 ponts d'un entrelacs torique généralisé. Comme pour le Lemme 2.2, la preuve découle alors de l'unicité, à isotopie près respectant l'entrelacs, d'une telle sphère de présentation en ponts pour un entrelacs torique généralisé (cf. Paragraphe 4).

La preuve du Lemme 2.4 se réduit donc à :

Affirmation 2.5 *Dans les variétés de Seifert $V(2, 3, a)$ $a=4, 5$, $W(2, 4, 3)$ et $S\left(0; 1; \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{c}\right)$, les involutions τ_h et τ_v sont conjuguées par un homéomorphisme isotope à l'identité.*

Preuve. On rappelle qu'on a choisi sur M une fibration de Seifert \mathcal{F}_0 de base orientable une sphère et admettant 3 fibres exceptionnelles. Pour cette fibration, τ_v renverse l'orientation des fibres et induit une symétrie de la base S^2 par rapport à un cercle contenant l'image des fibres exceptionnelles.

Suivant l'action induite par l'involution τ_h sur la base de la fibration \mathcal{F}_0 , on distingue deux cas :

1er cas: M est la sphère de Poincaré $V(2, 3, 5)$ ou l'espace octaédral $W(2, 4, 3)$

Dans ce cas, l'involution τ_h induit l'identité sur la base de la fibration \mathcal{F}_0 . L'involution τ_h est donc donnée par l'action d'un sous-groupe fini d'ordre 2 du groupe du cercle S^1 qui induit la fibration \mathcal{F}_0 sur M .

En particulier, $\tau_h = \varphi^2$ où φ est l'action d'ordre 4 sur chaque fibre induite par l'action de S^1 sur M . Alors comme τ_h et τ_v sont fibrées, elles commutent et $\tau_h \tau_v = \varphi \tau_v \varphi^{-1}$.

L'extérieur des points fixes de τ_v dans M porte une fibration de Seifert que l'on peut supposer, après isotopie, invariante par l'action du groupe engendré par τ_h et τ_v . D'après [11, 14, 24] cette fibration s'étend en une fibration de Seifert \mathcal{F}_1 de M , respectée par τ_h et τ_v .

En particulier pour cette fibration \mathcal{F}_1 , les rôles de τ_h et τ_v sont échangés: τ_h correspond à l'action d'une involution de Montesinos pour la fibration \mathcal{F}_1 , tandis que τ_v correspond à l'action d'ordre 2 induite sur chaque fibre de la fibration de Seifert \mathcal{F}_1 par l'action du cercle correspondante.

En particulier, $\tau_v = \Psi^2$ où Ψ est l'action d'ordre 4 induite sur chaque fibre de \mathcal{F}_1 par l'action du cercle correspondante et $\tau_h \tau_v = \Psi \tau_h \Psi^{-1}$.

On en déduit que $\varphi \tau_v \varphi^{-1} = \Psi \tau_h \Psi^{-1}$ et φ, Ψ sont des homéomorphisme isotopes à l'identité, car induits par des actions du cercle sur M .

2e cas: M est la variété tétraédrale $V(2, 3, 4)$ ou l'une des variétés diédrales $S\left(0; 1; \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{c}\right)$

Dans ce cas, l'involution τ_h induit une rotation d'ordre 2 sur la base S^2 de la fibration de Seifert \mathcal{F}_0 et l'identité sur la fibre générique de \mathcal{F}_0 .

Pour $V(2, 3, 4) = S\left(0; -\frac{1}{6}; \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$, l'involution τ_h échange les deux fibres exceptionnelles d'ordre 3 et induit une rotation d'ordre 2 sur la fibre exceptionnelle d'ordre 2.

Si σ est l'involution d'ordre 2 induite par l'action du cercle S^1 correspondant à la fibration de Seifert de $V(2, 3, 4)$, alors la composée $\sigma\tau_h = \sigma'$ est une involution sans points fixes sur $V(2, 3, 4)$ dont le quotient est la variété $W(2, 4, 3)$.

En particulier, l'involution de Montesinos τ_v se projette sur une involution de Montesinos dans $W(2, 4, 3)$ tandis que l'involution τ_h se projette sur l'involution associée au scindement de Heegaard horizontal de $W(2, 4, 3)$. Puisque d'après le premier cas les projections de ces deux involutions sont conjuguées dans $W(2, 3, 3)$ par un homéomorphisme isotope à l'identité, par relèvement de l'isotope, on obtient le même résultat dans $V(2, 3, 4)$.

Pour les variétés diédrales $S\left(0; 1; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{c}\right)$, l'involution τ_h échange les deux fibres exceptionnelles d'ordre 2 et induit l'identité (resp. une rotation d'ordre 2) sur la fibre exceptionnelle d'ordre c si c est impair (resp. pair). En particulier τ_h et τ_v commutent.

Comme dans le premier cas, l'extérieur des points fixes de l'involution de Montesinos τ_v porte une fibration de Seifert, qu'on peut supposer, après isotopie, invariante par l'action du groupe engendré par τ_h et τ_v [11, 14, 24]. Cette fibration s'étend en une fibration de Seifert \mathcal{F}_1 de M , respectée par τ_h et τ_v , et comme dans le premier cas, les rôles de τ_h et τ_v sont échangés pour cette fibration \mathcal{F}_1 .

Comme d'après [1] ou [32], la fibration \mathcal{F}_1 de base orientable est isotope à la fibration \mathcal{F}_0 , on obtient alors que les deux involutions τ_h et τ_v sont conjuguées par un homéomorphisme isotope à l'identité.

Ceci achève la preuve du Lemme 2.4 donc du Théorème 1. \square

Le Théorème 1 et la classification à isotopie près des scindements de Heegaard de genre 2 des variétés de Seifert de base D^2 ayant 2 fibres exceptionnelles (cf. [8]) permet de montrer le corollaire suivant pour les variétés de Seifert qui nous intéressent (cf. [6, Théorème 1]).

Corollaire 2.6 *Soit M une variété de Seifert de base S^2 ayant 3 fibres exceptionnelles d'ordre $(2, 3, p)$, $p \geq 5$, ou $(3, 3, q)$, $q \geq 2$, alors M admet un scindement de Heegaard de genre 2 unique à isotopie près, sauf lorsque M est une variété de Brieskorn $V(2, 3, a)$ avec $\text{pgcd}(3, a) = 1$ et $a \geq 7$, auquel cas M admet deux scindements de Heegaard de genre 2, chacun d'eux étant caractéristique.*

Preuve. D'après le Théorème 1, il suffit de montrer que la variété M admet, à isotopie près, un seul scindement vertical de genre 2. Cela découle directement de [5, Corol. 5.8 ou Th. 8.3] car les variétés considérées ont des invariants de type

$$S\left(0; e_0; \frac{1}{2}, \frac{\pm 1}{3}, \frac{\beta}{p}\right), \quad p \geq 5$$

ou

$$S\left(0; e_0; \frac{\pm 1}{3}, \frac{\pm 1}{3}, \frac{\gamma}{q}\right), \quad q \geq 2. \quad \square$$

Preuve du Corollaire 2. De la même façon, en considérant les invariants de Seifert des variétés elliptiques et euclidiennes et en appliquant [8, Corollaire 5.8 ou Théorème 8.2], le Théorème 1 implique l'unicité, à isotopie près, des scindements de Heegaard de genre 2 pour ces variétés de Seifert. \square

3 Homéotopie des petites variétés de Seifert

Le but de ce paragraphe est de démontrer le Théorème 3 ainsi que le Corollaire 4.

On commence par démontrer la

Proposition 3.1 *Soit M une variété de Seifert de base S^2 ayant 3 fibres exceptionnelles d'ordre $(2, 3, p)$, $p \geq 5$ ou $(3, 3, q)$, $q \geq 2$. Tout homéomorphisme f de M est isotope à un homéomorphisme préservant la fibration de Seifert de M .*

Preuve. Soit f un homéomorphisme de M . D'après le Corollaire 2.6, la variété M admet un scindement de Heegaard de genre 2 Σ qui est caractéristique. En particulier $f(\Sigma)$ est isotope à Σ . Après une isotopie, on peut donc supposer que $f(\Sigma) = \Sigma$.

Soit τ l'involution induite sur M par l'involution de Weierstrass sur Σ . Alors $M/\tau = S^3$ et l'image des points fixes de τ dans S^3 est un entrelacs L .

D'après Nielsen, tout homéomorphisme de Σ commute, à isotopie près, avec l'involution de Weierstrass. Après une isotopie sur Σ , on peut supposer que les restrictions $f|_{\Sigma}$ et $\tau|_{\Sigma}$ commutent. D'après [3] (voir aussi [26]), on peut prolonger l'isotopie à chaque bretzel bordé par Σ dans M , pour faire commuter f avec τ sur M .

On peut supposer maintenant que f commute avec T sur M et induit donc, par passage au quotient, un homéomorphisme g de la paire (S^3, L) .

On va distinguer maintenant plusieurs cas (qui ne sont pas forcément disjoints) suivant le type de l'entrelacs L . On traite d'abord le cas le plus élémentaire.

1er cas: M est une variété de Brieskorn $V(2, 3, a)$, $\text{pgcd}(3, a) = 1$, $a \geq 4$

On choisit alors comme scindement de Heegaard caractéristique, le scindement horizontal. Dans ce cas là, d'après le Lemme 2.2, l'entrelacs L est un entrelacs torique généralisé: il est formé de quelques fibres de la fibration de Seifert de S^3 quotient de celle de M par τ . En particulier, l'extérieur $E(L) = S^3 - \mathring{N}(L)$ admet une fibration de Seifert.

Soit g l'homéomorphisme de la paire (S^3, L) induite par f , on peut supposer que g induit un homéomorphisme de $E(L)$. Comme $E(L)$ est une variété de Seifert suffisamment grande, d'après [45], on peut supposer, après une isotopie qui s'étend à S^3 , que g respecte la fibration de Seifert de $E(L)$, et donc la fibration de Seifert de S^3 dont L est une réunion de fibres.

Comme cette fibration est la fibration quotient de celle de M par τ , en passant au revêtement double de S^3 ramifié le long de L , on obtient ainsi une isotopie de f à un homéomorphisme respectant la fibration de Seifert de M .

2e cas: M a un groupe fondamental infini

Si M n'appartient pas au premier cas, l'involution associée à l'unique scindement de Heegaard vertical de genre 2 (à isotopie près) est une involution de Montesinos.

L'entrelacs L est alors un entrelacs de Montesinos à 3 branches non elliptiques qui ne porte plus sur son complémentaire de fibration de Seifert. Cependant, la fibration de Seifert de M induit au quotient $M/\tau = S^3$ une fibration de Seifert orbifold par cercles et intervalles, telle que L est l'ensemble des extrémités des fibres intervalles.

Le calcul du groupe $\pi_0 \text{Homéo}(S^3, L)$ effectué dans [10] (cf. aussi [17, Chap. 12]) montre que tout homéomorphisme g de la paire (S^3, L) est isotope à un homéomorphisme qui respecte cette fibration de Seifert orbifold induite sur (S^3, L) par M .

Comme dans le premier cas, par passage au revêtement double, on obtient une isotopie de f à un homéomorphisme respectant la fibration de Seifert de M .

3e cas: M est une variété de Seifert elliptique (c'est-à-dire de groupe fondamental fini)

Si M n'appartient pas au premier cas, alors la démonstration est tout à fait analogue au second cas et repose sur le calcul de $\tau_0 \text{Homéo}(S^3, L)$ pour les entrelacs de Montesinos elliptiques à 3 branches effectué dans [33]. Ce résultat utilise le théorème d'uniformisation des orbifolds de dimension 3 dont l'ensemble de ramification est de dimension ≥ 1 , annoncé par Thurston dans [38, 39] (voir aussi [21]). \square

On peut maintenant achever la preuve du Théorème 2.

Soit M une des variétés de Seifert considérées dans le Théorème 2, et f un homéomorphisme de M homotope à l'identité.

D'après la Proposition 3.1, f est homotope à un homéomorphisme f' respectant la fibration de Seifert de M .

Comme f' est homotope à l'identité, f' respecte chaque fibre exceptionnelle de M et induit sur la base S^2 de la fibration un homéomorphisme qui est homotope à l'identité, par une homotopie respectant les images des fibres exceptionnelles de M . En particulier, l'homéomorphisme induit par f' sur S^2 est alors isotope à l'identité par une isotopie respectant l'image des fibres exceptionnelles. Cette isotopie se relève en une isotopie fibrée de f' à l'identité, ce qui achève la preuve de Théorème 2. \square

Le calcul de groupe des homéotopies $\pi_0 \text{Homéo}(M)$ d'une telle variété de Seifert se réduit: donc à celui des homéomorphismes qui respectent la fibration de Seifert de M .

En particulier, dans le cas de la sphère de Poincaré $V(2, 3, 5)$, tout homéomorphisme de $V(2, 3, 5)$ est homotope à l'identité. En effet, d'après [31] le seul automorphisme extérieur non trivial de $\pi_1 V(2, 3, 5)$ n'est pas réalisé par un homéomorphisme, ni même une équivalence d'homotopie. Le Théorème 3 implique alors directement le Corollaire 4.

4 Présentations en ponts des entrelacs toriques généralisés

Soit T^2 le tore plongé dans la sphère de dimension 3, S^3 , comme bord d'un voisinage régulier d'une courbe non nouée. Un noeud torique est une courbe

connexe tracée sur T^2 , nouée dans S^3 . Ces noeuds sont classifiés à isotopie près de la manière suivante: une courbe simple tracée sur T^2 est déterminée à isotopie près par l'élément de $\pi_1 T^2$ qu'elle représente. L'élément (p, q) de $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ ainsi associé à un noeud torique classifie complètement le noeud à isotopie près dans S^3 modulo les relations suivantes:

$$(p, q) \sim (p', q') \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{p}{q} = \frac{p'}{q'} \\ \text{ou} \\ \frac{p}{q} = \frac{q'}{p'} \end{cases}$$

On peut donc toujours trouver pour un noeud torique un couple $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ où $1 < |q| < p$, représentant le noeud, noté $K_{p,q}$.

On s'intéresse, dans ce paragraphe, aux *présentations en ponts* des noeuds toriques que nous définissons maintenant.

Fixons une fois pour toutes une fonction de Morse h sur S^3 ayant comme seules singularités un maximum μ , et un minimum λ . Une présentation en ponts d'un noeud K est un plongement de K dans S^3 en position générale par rapport à h , et tel qu'il existe une sphère de niveau de h séparant les maxima de la restriction $h|K$ de ses minima. Le nombre de maxima de $h|K$ est appelé le nombre de ponts de la présentation. Deux présentations en ponts d'un même noeud K sont dites équivalentes si elles sont isotopes parmi les présentations en ponts de K .

Etant donné une présentation à n ponts de K , il existe une opération canonique, à équivalence près, fournissant une présentation à $n + 1$ ponts du même noeud; c'est celle de «*stabilisation élémentaire*». Soit S une sphère de niveau de h séparant les maximum des minima de $h|K$; considérons une petite boule B , voisinage d'un point de $K \cap S$, intersectant S en un disque. On obtient une présentation à $n + 1$ ponts du même noeud en remplaçant $K \cap S$ par le plongement décrit ci-dessous sans le modifier dans le complémentaire de B .

On vérifie sans peine que la nouvelle présentation est bien définie à isotopie près, c'est-à-dire ne dépend pas de la boule B choisie, ni du point de $K \cap S$ choisi pour faire l'opération. Une composition de stabilisations élémentaires s'appelle une «*stabilisation*».

Exemple. On peut isotoper le tore T^2 sur le modèle «standard», bord du voisinage régulier d'une courbe ayant un maximum et un minimum.

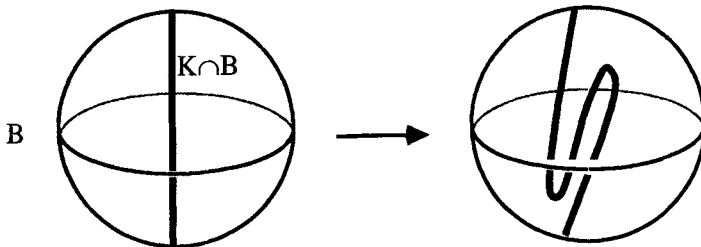


Fig. 5

Le noeud torique $K_{p,q}$ hérite ainsi de la présentation à p ponts induite. Mais, comme il a été précisé, on a une symétrie entre q et p qui respecte le noeud; une réalisation géométrique de cette symétrie consiste à échanger les deux composantes complémentaires de T^2 . Le noeud $K_{p,q}$ apparaît alors sous une présentation à $|q|$ ponts. En fait, la présentation à p ponts est une stabilisation de cette présentation à $|q|$ ponts, à laquelle nous nous référerons dans la suite comme à la présentation standard.

Notons K_0 l'âme du tore bordé par T^2 dont le méridien rencontre $K_{p,q}$ en $|q|$ points.

Remarquons que si $q=2$, le noeud $K_{p,q}$ est un noeud rationnel (admettant une présentation à deux ponts). Dans [30], il est démontré que toute présentation en ponts d'un noeud rationnel est obtenue par stabilisations sur la présentation à deux ponts standard. Le but de ce paragraphe est d'étendre ce résultat aux noeuds toriques et aux entrelacs toriques généralisés.

Théorème 4.1 *Toute présentation en ponts d'un noeud torique $K_{p,q}$ ($1 < q < p$) s'obtient par stabilisations sur la présentation « standard » à q ponts.*

On aura besoin dans la suite d'un critère, déjà utilisé dans [29] et [30], permettant de reconnaître qu'une présentation est obtenue par stabilisation.

4.2 Critère de stabilisation. Soit K un noeud présenté en ponts. Soit S une sphère de niveau de h séparant les minima de $h|K$ des maxima: dans la suite une telle sphère sera appelée *sphère de présentations en ponts pour K* . Une *membrane* est un disque Δ , dont le bord est réunion de deux arcs k_1, k_2 avec $k_1 \cap k_2 = \partial k_1 = \partial k_2$, et tel que $\Delta \cap S = k_1$ et $\Delta \cap K = k_2$. Un tel disque Δ est donc nécessairement contenu dans l'une des deux boules B^+, B^- délimitées par S . Supposons qu'il existe deux membranes pour K , l'une Δ^+ contenue dans B^+ , l'autre Δ^- contenue dans B^- , telles que $\Delta^+ \cap \Delta^- = 1$ point dans K . Alors la présentation K est obtenue par stabilisation.

Soit K un représentant du noeud $K_{p,q}$ présenté en ponts de sorte que K ne contienne pas de stabilisations, on va montrer que K est isotope à la présentation à $|q|$ ponts de l'introduction. Etendons cette présentation en une présentation en ponts de $K \cup K_0$, de sorte que K_0 ait le plus petit nombre de singularités. Soient n_0 et n_K les nombres de singularités respectifs de $h|K$ et de $h|L$.

Proposition 4.3 *Dans la situation ci-dessus, on a la relation: $n_K = |q| n_0$.*

Pour établir cette proposition, nous utiliserons l'anneau singulier A suivant: soit R l'anneau $S^1 \times [0, 1]$, l'anneau A est le quotient de R par la relation d'équivalence:

$$(x, t) \sim (y, t) \Leftrightarrow (x, t) = (y, t') \quad \text{où } t = t' \text{ et } x = y.$$

Soit π la projection quotient de R vers A . Il existe une façon unique à isotopie près de plonger A dans S^3 de sorte que $\pi(S^1 \times 0)$ s'identifie avec K et $\pi(S^1 \times 1)$ avec K_0 . Par une légère isotopie, on peut supposer que $h \circ \pi|_R$ est une fonction de Morse avec des singularités sur ∂R du type «demi-selle». Soit \mathcal{F} le feuilletage de Morse de R défini par la fonction $h \circ \pi$. Une selle de \mathcal{F} est dite *inessentielle* si elle est contenue dans une feuille de \mathcal{F} homéomorphe à un cercle. Dans le cas contraire, elle est dite *essentielle*.

Lemme 4.4 *Après une isotopie de A qui respecte la présentation en ponts de $K \cup K_0$, le feuilletage \mathcal{F} ne contient aucune selle inessentielle.*

Preuve. On commence par remarquer que toute feuille fermée de \mathcal{F} , homéomorphe à un cercle, est homotope à zéro sur R , car sinon on pourrait isotoper le noeud K sur une sphère de niveau de R , ce qui est impossible. La courbe fermée contenant une selle inessentielle est donc homotope à zéro. L'élimination de ces singularités se fait comme dans la Proposition 2 de [29]. \square

Dans la situation fournie par le lemme précédent, toutes les singularités de \mathcal{F} dans $\text{Int}R$ sont des selles essentielles, les 4 séparatrices issues d'une selle s de \mathcal{F} aboutissent à ∂R . Supposons que 3 séparatrices issues de s aboutissent à la même composante de $S^1 \times \{0, 1\}$; on peut alors faire apparaître une selle de ce type «plus intérieure», c'est-à-dire que les 3 séparatrices délimitent 2 triangles Δ_1 et Δ_2 dont le bord est réunion de 2 séparatrices et d'un sous-arc de $S^1 \times \{0, 1\}$, et qui se rencontrent sur une séparatrice. C'est la situation décrite dans la Remarque 1.3 (cf. Fig. 4).

Si $\pi((\Delta_1 \cup \Delta_2) \cap \partial R)$ est injective, on reconnaît, après une légère perturbation de $\pi(\Delta_1)$ et $\pi(\Delta_2)$, 2 membranes en position d'annulation pour la composante K ou pour K_0 , selon que $\Delta_1 \cup \Delta_2$ rencontre $S^1 \times \{0\}$ ou $S^1 \times \{1\}$.

L'injectivité de $\pi((\Delta_1 \cup \Delta_2) \cap \partial R)$ a lieu en particulier si $(\Delta_1 \cup \Delta_2) \cap \partial R$ est contenu dans $S^1 \times \{0\}$, par définition de π . Dans le cas de non-injectivité, on a nécessairement $\pi((\Delta_1 \cup \Delta_2) \cap S^1 \times \{1\}) = K_0$.

En particulier $n_0 = 2$. Une application simple de la formule d'Euler-Poincaré au feuilletage \mathcal{F} donne:

$$n_K \leq (S) - 1 \leq 2(|q| - 1).$$

Donc le nombre de ponts du noeud K serait inférieur à $|q| - 1$, ce qui est impossible d'après [34].

On déduit de cette analyse qu'on peut associer à chaque selle de \mathcal{F} , un couple formé d'une singularité de $S^1 \times \{0\}$ et d'une singularité de $S^1 \times \{1\}$. La formule $n_K = |q| f n_0$ en découle. \square

Plus que la formule ci-dessus, c'est l'allure du feuilletage \mathcal{F} que nous allons utiliser maintenant. En effet, chaque selle de \mathcal{F} définit 2 triangles Δ_0 et Δ_1 bordés par 2 séparatrices issues de s et un arc respectivement sur $S^1 \times \{0\}$ et sur $S^1 \times \{1\}$. On peut alors faire glisser l'arc $\pi(S^1 \times \{0\})$ dans un voisinage de $\pi(S^1 \times \{1\})$ à travers $\Delta_1 \cup \Delta_2$. Plus précisément, on se ramène d'abord au cas où les maximums de $h|K \cup K_0$ (resp. les minimums) sont supérieurs (resp. inférieurs) au niveau des selles de $h \circ \pi|R$ (cf. la preuve de la Proposition 2 de [29]). Soit N un petit voisinage régulier de K_0 . On peut supposer que $\partial N \cap A$ est un noeud, présenté en ponts, nécessairement isotope à K . Alors, l'isotopie décrite précédemment respectera une sphère de présentation en ponts de $K \cup K_0$, et sera donc une isotopie de présentation en ponts de K .

Dans la situation actuelle, le noeud K est tracé sur le bord d'un petit voisinage régulier N d'un noeud trivial K_0 , lui-même présenté en ponts avec n_0 singularités.

Si $n_0 \neq 2$, la présentation en ponts du noeud trivial K_0 est obtenue par stabilisations d'après [29]; on peut donc trouver deux membranes m^+ et m^- pour K_0 , en position d'annulation par rapport à une sphère de niveau S . Quitte à isotoper N sur un voisinage plus petit de K_0 , les disques m^+ et m^- intersectent $S^3 - N$ en deux disques qui sont des membranes m'^+ et m'^- relatives à S pour des arcs k^+ et k^- tracés sur ∂N . Chacun de ces arcs est contenu dans un anneau, r^+ ou r^- , fermeture d'une composante de $\partial N - S$. La réunion $r^+ \cup r^-$ est toujours un anneau, dont les deux composantes sont jointes par l'arc $k^+ \cup k^-$.

On peut maintenant isotoper K_0 par une isotopie supportée dans un voisinage de $r^+ \cup r^-$ de sorte que $k^+ \cup k^-$ soit inclus dans K . A ce moment, m^+ et m^- deviennent des membranes en position d'annulation pour K , contrairement à l'hypothèse.

Finalement, $n_0 = 2$. Le noeud L est présenté avec un seul pont, et le noeud K avec q ponts. Le tore ∂N est isotope au tore standard T^2 . D'après la classification des noeuds toriques rappelée dans l'introduction, il existe exactement deux courbes non isotopes sur T^2 représentant le noeud torique $K_{p,q}$. Il en existe donc une, K^1 , isotope à K par une isotopie respectant ∂N . On peut faire en sorte que cette isotopie soit une isotopie de présentations en ponts. Ainsi, on a isotopé K sur la présentation standard à $|q|$ ponts décrite dans l'introduction.

Cette démonstration montre en fait que toute présentation en pont de l'entrelacs torique généralisé $L = K \cup K_0$ est une stabilisation de la présentation en ponts standard de L . Elle se généralise immédiatement au cas où K est un entrelacs torique de type (pk, qk) à $k \geq 1$ composantes. On obtient ainsi la généralisation suivante du Théorème 4.1.

Théorème 4.5 *Soit L un entrelacs torique généralisé (formé par une réunion finie de fibres d'une fibration de S^3). Toute présentation en ponts de L s'obtient par stabilisation de la présentation standard.*

Références

1. Asano, K.: Homeomorphisms of prism manifolds. *Yokohama Math. J.* **26**, 19–25 (1978)
2. Birman, J., Gonzalez-Acuna, F., Montesinos, J.M.: Minimal Heegaard splittings of 3-manifolds are not unique. *Mich. Math. J.* **23**, 97–103 (1976)
3. Birman, J., Hilden, H.: Heegaard splittings of branched coverings of S^3 . *Trans. Am. Math. Soc.* **213**, 315–352 (1975)
4. Birman, J., Rubinstein, J.H.: Homeotopy groups of a class of 3-manifolds. *Proc. Lond. Math. Soc.* **49**, 517–536 (1984)
5. Boileau, M., Collins, D.J., Zieschang, H.: Genus 2 Heegaard decompositions of small Seifert manifolds. *Ann. Inst. Fourier (à paraître)*
6. Boileau, M., Otal, J.-P.: Groupe des difféotopies de certaines variétés de Seifert. *C.R. Acad. Sci., Paris Sér I.* **303**, 19–22 (1986)
7. Boileau, M., Otal, J.-P.: Sur les scindements de Heegaard du tore T^3 . *J. Differ. Géom.* vol 32, 209–233 (1990)
8. Boileau, M., Rost, M., Zieschang, H.: On Heegaard decompositions of torus knot exteriors and related Seifert fibre spaces. *Math. Ann.* **279**, 553–581 (1988)
9. Boileau, M., Zieschang, H.: Heegaard genus of closed orientable Seifert 3-manifolds. *Invent. Math.* **76**, 455–468 (1984)
10. Boileau, M., Zimmermann, B.: Symmetries on nonelliptic Montesinos links. *Math. Ann.* **277**, 563–584 (1987)
11. Bonahon, F.: Involutions et fibrés de Seifert dans les variétés de dimension 3. Orsay (Thèse de 3e cycle) 1979
12. Bonahon, F.: Difféotopie des espaces lenticulaires. *Topology* **22**, 305–314 (1983)
13. Bonahon, F., Otal, J.-P.: Scindements de Heegaard des espaces lenticulaires. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér.* **16**, 451–466 (1983)
14. Bonahon, F., Siebenmann, L.: The classification of Seifert fibered 3-orbifolds, Low dimensional topology. *Lond. Math. Soc. Lect. Note. Ser.* **95**, 19–85 (1985)
15. Bonahon, F., Siebenmann, L.: The characteristic splitting of irreducible compact 3-orbifolds. *Math. Ann.* **278** (1987)
16. Burde, G., Murasugi, K.: Links and Seifert fibre spaces. *Duke Math. J.* **37**, 89–93 (1970)
17. Burde, G., Zieschang, H.: Knots. *De Gruyter Stud. Math.* **5** (1985)

18. Dehn, M.: Die Gruppe der Abbildungsklassen. *Acta Math.* **69**, 135–206 (1938)
19. Friedman, J.L., Witt, D.M.: Homotopy is not isotopy for homeomorphisms of 3-manifolds. *Topology* **25**, 35–44 (1986)
20. Gabai, D.: Foliations and the topology of 3-manifolds, III. *J. Differ. Geom.* **26**, 479–536 (1987)
21. Hodgson, C.: Geometric structures on 3-dimensional orbifolds: notes on Thurston's proof. (Preliminary draft 1989)
22. Hodgson, C., Rubinstein, J.H.: Involutions and isotopies of Lens spaces. In: *Knot theory and manifolds*. (Lect. Notes Math. vol. 1144, pp. 60–96). Berlin Heidelberg New York: Springer
23. Hass, J., Scott, P.: Isotopy equivalence and homeomorphism of 3-manifolds. (M.S.R.I. pre-print July 1989)
24. Meeks, W., Scott, P.: Finite group actions on 3-manifolds. *Invent. Math.* **86**, 287–346 (1986)
25. Montesinos, J.M.: Variedades de Seifert que son recubridores ciclicos ramificados de dos hojas. *Bol. Soc. Mat. Mex.* **18**, 1–32 (1973)
26. Montesinos, J.M.: *Classical tessellations and three-manifolds*. (Universitext). Berlin Heidelberg New York: Springer 1987
27. Moriah, Y.: Heegaard splittings of Seifert fibered spaces. *Invent. Math.* **91**, 465–481 (1988)
28. Orlik, P., Vogt, E., Zieschang, H.: Zur Topologie gefaserter dreidimensionaler Mannigfaltigkeiten. *Topology* **6**, 46–64 (1967)
29. Otal, J.-P.: Présentations en ponts du noeud trivial. *C.R. Acad. Sci., Paris Sér. I.* **294**, 553–556 (1982)
30. Otal, J.-P.: Présentations en ponts des noeuds rationnels. In: *Low Dimensional Topology*. Fenn, R. (ed.) Sussex 1982 Lond. Math. Soc., Lect. Note. Ser. **95**, 143–160 (1985)
31. Plotnick, S.: Homotopy equivalences and free modules. *Topology* **21**, 91–99 (1982)
32. Rubinstein, J.H.: On 3-manifolds that have finite fundamental group and contain Klein bottles. *Trans. Am. Math. Soc.* **251**, 129–137 (1979)
33. Sakuma, M.: The geometries of spherical Montesinos links. *Kobe J. Maths* **7**, 167–190 (1990)
34. Schubert, H.: Über eine numerische Knoteninvariante. *Math. Z.* **61**, 245–288 (1954)
35. Seifert, H.: Topologie dreidimensionaler gefaserner Räume. *Acta Math.* **60**, 147–238 (1933)
36. Scott, P.: Homotopy implies isotopy for some Seifert fibre spaces. *Topology* **24**, 341–351 (1985)
37. Scott, P.: The geometries of 3-manifolds. *Bull. Lond. Math. Soc.* **15**, 401–487 (1983)
38. Thurston, W.: Three dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry. *Bull. Am. Math. Soc.* **6**, 357–381 (1982)
39. Thurston, W.: Hyperbolic structures on Haken manifolds, I. *Ann. Math.* **124**, 203–246 (1986); II, III, ..., (to appear)
40. Thurston, W.: Three manifolds with symmetry. Preliminary report.
41. Tollefson, J.L.: Involutions of Seifert fiber spaces. *Pac. J. Math.* **74**, 519–529 (1978)
42. Viro, O.Ya.: Linkings, two sheeted branched coverings and braids. *Math. USSR, Sb.* **16**, 222–236 (1972)
43. Viro, O.Ya.: Compact four-dimensional exotica with small homology. Prepr. LOMI. Leningrad 1988
44. Waldhausen, F.: Heegaard Zerlegungen der 3-Sphäre. *Topology* **7**, 195–203 (1968)
45. Waldhausen, F.: Eine Klasse von 3-dimensionalen Mannigfaltigkeiten, I. *Invent. Math.* **3**, 308–333 (1967); II. *Invent. Math.* **4**, 87–117 (1967)
46. Waldhausen, F.: On irreducible 3-manifolds which are sufficiently large. *Ann. Math.* **87**, 56–88 (1968)