

DIFFÉOTOPIES DES ESPACES LENTICULAIRES

FRANCIS BONAHO

(Received 17 December 1981)

LE RÉSULTAT essentiel de cet article est le suivant.

THEOREME 1. *A isotopie près, l'espace lenticulaire $L(p, q)$ contient un unique tore le séparant en deux tores solides.*

L'existence d'un tel tore est classique, et peut être même prise comme définition des espaces lenticulaires (si l'on y inclut $S^1 \times S^2$). Le point important de l'énoncé concerne donc l'unicité de ce tore à isotopie près.

Une conséquence facile du théorème 1 est la détermination du groupe des difféotopies (= classes d'isotopie de difféomorphismes) de $L(p, q)$. En fait, d'après la classification des espaces lenticulaires, la détermination de ce groupe est équivalente au Théorème 1.

Une autre application intéressante, quoique n'apportant aucun résultat nouveau, est que notre preuve du Théorème 1 fournit une nouvelle démonstration de la classification des espaces lenticulaires qui est entièrement géométrique (modulo quelques considérations élémentaires sur l'homologie de rang 1).

Le Théorème 1 correspond à une vieille conjecture qui, hormis pour les cas faciles de S^3 , $S^1 \times S^2$ et $\mathbb{R}P^3$, est restée longtemps sans progrès significatif (voir par exemple [4], Problem 3-35, en 1976). Ces toutes dernières années, divers travaux de N. Ivanov, J. Rubinstein et J. Birman en ont fourni une preuve dans le cas particulier où l'espace lenticulaire considéré contient une bouteille de Klein [3, 7] ou une surface homéomorphe à la somme connexe de trois plans projectifs [1]; les méthodes utilisées sont inspirées de celles introduites par W. Haken pour l'étude des variétés de dimension 3 qui sont "suffisamment grandes".

Or, dès 1956, H. Schubert démontrait dans son article [10] sur les noeuds à deux ponts un résultat que l'on peut énoncer ainsi: Identifiant l'espace lenticulaire $L(p, q)$ avec le revêtement double ramifié d'un noeud à deux ponts, soit τ l'involution de revêtement correspondante (voir une définition explicite de τ au §1); alors, à isotopie τ -équivariante près, $L(p, q)$ contient exactement un tore qui est préservé par τ et sépare $L(p, q)$ en deux tores solides. En effet, la donnée d'un tel tore est équivalente à celle d'une présentation à deux ponts du noeud considéré, et la deuxième moitié (§§5 à 10) de [10] est consacrée à la démonstration de l'unicité des présentations à deux ponts à isotopie préservant le noeud près. Il semble que ce résultat ait assez peu attiré l'attention, y compris sous sa forme théorie des noeuds (voir par exemple certains articles sur les automorphismes des noeuds à deux ponts parus dans les années 70, alors que le groupe de ces automorphismes est implicitement déterminé dans [10]). Pourtant, on peut considérer que le théorème 1 était pratiquement "démonstré entre les lignes" dans [10]. En effet, la preuve que nous présentons ici est directement issue d'un "nettoyage" des démonstrations de [10], et en utilise les grandes lignes autant que les détails; hormis la mise en place du cadre général et quelques simplifications redevables aux vingt-cinq années de mathématiques qui se sont écoulées

depuis 1956, les différences techniques sont en effet mineures (voir seulement la remarque concluant le §4).

Nous espérons que le présent article incitera le lecteur à se plonger dans [10] et contribuera à renouveler l'intérêt pour les méthodes de H. Schubert telles qu'elles sont développées dans [8–10]. Celles-ci, plus fines que les techniques de minimalisation d'intersection qui suffisent habituellement pour travailler dans les variétés de Haken, sont en effet peut-être plus adaptées que ces dernières pour l'étude des variétés de dimension 3 insuffisamment grandes (voir également [2]).

N.B. Après soumission de ce manuscrit, nous avons appris que le groupe $\pi_0 \text{Diff } L(p, q)$ a été indépendamment et simultanément déterminé par C. D. Hodgson dans sa thèse à l'Université de Melbourne (1981).

§1. DIFFEOMORPHISMES DES ESPACES LENTICULAIRES

Avant de démontrer le théorème 1, nous examinons d'abord ici son application à l'étude des difféomorphismes des espaces lenticulaires.

L'espace lenticulaire orienté $L(p, q)$, où $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{Z}$ sont premiers entre eux, est obtenu en recollant deux copies V_1 et V_2 de $S^1 \times D^2$ par le difféomorphisme $\theta: \partial V_1 \rightarrow \partial V_2$ de degré -1 défini par $\theta(u, v) = (u^r v^p, u^s v^q)$, où $qr - ps = -1$ et où S^1 (resp. D^2) est considéré comme l'ensemble des nombres complexes de module égal (resp. inférieur ou égal) à 1. Etant donnés V_1 et V_2 dans $L(p, q)$, il est toujours possible de modifier les paramétrages (orientés) $V_1 \cong V_2 \cong S^1 \times D^2$ de sorte qu'alors $\theta(u, v) = (u^{r'} v^{p'}, u^{s'} v^{q'})$ où q', r', s' prennent n'importe quelles valeurs telles que $q' \equiv q[p]$ et $q'r' - ps' = -1$.

Les espaces lenticulaires $L(1, 0) \cong S^3$ et $L(0, 1) \cong S^1 \times S^2$ apparaîtront comme des exceptions tout au long de cet article. D'autre part, le Théorème 1 et ses applications sont classiquement connus (et faciles) dans ces deux cas. Par conséquent, nous supposons toujours que $p \geq 2$.

Soit $\varphi: L(p, q) \rightarrow L(p', q')$ un difféomorphisme de degré $+1$ entre deux espaces lenticulaires, construits comme ci-dessus. Le Théorème 1 affirme que φ peut être isotopé de sorte que, ou bien $\varphi(V_1) = V'_1$ et $\varphi(V_2) = V'_2$, ou bien $\varphi(V_1) = V'_2$ et $\varphi(V_2) = V'_1$ (les primes distinguant les données relatives à $L(p', q')$). Par considération des noyaux des applications $H_1(\partial V_i) \rightarrow H_1(V_i)$ et $H_1(\partial V'_i) \rightarrow H_1(V'_i)$, $i = 1, 2$, un exercice facile et classique montre alors que $p = p'$ et que $q \equiv q'[p]$ dans le premier cas, et $qq' \equiv 1[p]$ dans le second. Ceci redémontre donc la classification des espaces lenticulaires orientés[6].

Les applications les plus intéressantes du Théorème 1 concernent cependant le groupe des difféotopies de $L(p, q)$. En effet, d'après le Théorème 1, tout difféomorphisme de $L(p, q)$ est isotope à un difféomorphisme préservant le tore $T = \partial V_1 = \partial V_2$.

Parmi les difféomorphismes de $L(p, q)$ respectant T figure toujours l'involution τ qui préserve chacun des tores solides V_1 et V_2 et qui s'exprime dans les paramétrisations $V_1 \cong V_2 \cong S^1 \times D^2$ par $\tau(u, v) = (\bar{u}, \bar{v})$. Elle correspond à la translation de revêtement quand $L(p, q)$ est identifié au revêtement double ramifié d'un noeud à deux ponts.

D'autre part, il est classique (et facile à vérifier par considération des applications $H_1(T) \rightarrow H_1(V_i)$, $i = 1, 2$) que $L(p, q)$ n'admet en général pas de difféomorphismes échangeant V_1 et V_2 , sauf si $q^2 \equiv \pm 1[p]$. Quand $q^2 \equiv 1[p]$, il existe une involution σ_+ de degré $+1$ qui, si l'on a choisi les paramétrages $V_1 \cong V_2 \cong S^1 \times D^2$ de sorte que $r = -q$, échange V_1 et V_2 par l'application $(u, v) \in V_1 \leftrightarrow (u, v) \in V_2$. De même, quand $q^2 \equiv -1[p]$, $L(p, q)$ admet un difféomorphisme σ_- de degré -1 et d'ordre 4 qui, si les paramétrages $V_1 \cong V_2 \cong S^1 \times D^2$ sont choisis de sorte que $r = q$, s'exprime par $(u, v) \in V_1 \mapsto (\bar{u}, v) \in V_2$ et $(u, v) \in V_2 \mapsto (u, \bar{v}) \in V_1$. Remarquer que τ commute avec σ_+ et σ_- , et que $\sigma_-^2 = \tau$.

PROPOSITION 2. *Tout difféomorphisme de $L(p, q)$ est isotope à un élément du groupe engendré par τ et, éventuellement, σ_+ et σ_- .*

Remarque. L'exclusion de $L(0, 1) \cong S^1 \times S^2$ est ici nécessaire. En effet, le twist de Dehn le long de $1 \times S^2$ n'est pas isotope à un composé de τ , σ_+ , et σ_- .

Démonstration. Soit φ un difféomorphisme de $L(p, q)$. D'après le Théorème 1, on peut l'isotoper de sorte que $\varphi(T) = T$, où $T = \partial V_1 = \partial V_2$. Quitte à composer avec σ_+ ou σ_- , on peut en outre supposer que $\varphi(V_1) = V_1$ et $\varphi(V_2) = V_2$.

Pour $i = 1, 2$, soit m_i un générateur du noyau de $H_1(T) \rightarrow H_1(V_i)$. Puisque $p \neq 0, 1$, m_1 et m_2 sont distincts et $m_1 \cdot m_2 \neq \pm 1$. Du fait que $\varphi_*(m_i) = \pm m_i$ dans $H_1(T)$, il s'ensuit que φ_* est sur $H_1(T)$ la multiplication par ± 1 .

Quitte à composer φ avec τ , on peut maintenant supposer que φ_* est l'identité sur le tore T . Un argument classique, utilisant un disque méridien dans V_1 et V_2 , fournit alors une isotopie fixant T entre φ et l'identité. Ceci achève la preuve. \square

Notons $\text{Diff } L(p, q)$ le groupe topologique des difféomorphismes de $L(p, q)$.

THEOREME 3. *Le groupe $\pi_0 \text{Diff } L(p, q)$ des classes d'isotopie de difféomorphismes de $L(p, q)$ est (pour $p \geq 2$) isomorphe à :*

- (a) $\mathbb{Z}/2$, de générateur τ , si $q^2 \not\equiv \pm 1[p]$.
- (b) $\mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$, de générateurs τ et σ_+ , si $q^2 \equiv 1[p]$ et $q \not\equiv \pm 1[p]$.
- (c) $\mathbb{Z}/2$, de générateur τ , si $q \equiv \pm 1[p]$ et $p \neq 2$.
- (d) $\mathbb{Z}/4$, de générateur σ_- , si $q^2 \equiv -1[p]$ et $p \neq 2$.
- (e) $\mathbb{Z}/2$, de générateur σ_- , si $p = 2$.

Démonstration. Soit $G(p, q)$ le groupe abstrait muni d'une présentation dont les générateurs correspondent à τ et, quand $L(p, q)$ les admet, à σ_+ et σ_- , et dont les relateurs traduisent les relations évidentes $\tau^2 = \sigma_+^2 = Id$, $\sigma_-^2 = \tau$, $\tau\sigma_+ = \sigma_+\tau$ et, quand $p = 2$, $\sigma_+\sigma_-\sigma_+ = \sigma_-^{-1}$. Le groupe $G(p, q)$ est ainsi isomorphe à :

- (i) $\mathbb{Z}/2$ quand $q^2 \not\equiv \pm 1[p]$.
- (ii) $\mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$ quand $q^2 \equiv 1[p]$ et $p \neq 2$.
- (iii) $\mathbb{Z}/4$ quand $q^2 \equiv -1[p]$ et $p \neq 2$.
- (iv) D_8 quand $p = 2$.

La Proposition 2 montre que l'homomorphisme naturel $G(p, q) \rightarrow \pi_0 \text{Diff } L(p, q)$ est surjectif. Il suffit donc de déterminer son noyau pour calculer $\pi_0 \text{Diff } L(p, q)$. Pour cela, considérons la composition :

$$G(p, q) \rightarrow \pi_0 \text{Diff } L(p, q) \rightarrow \text{Aut } H_*L(p, q).$$

Sur $H_1L(p, q) \cong \mathbb{Z}/p$, τ , σ_+ et σ_- agissent respectivement par multiplication par -1 , $-q$ et q . Si $q \not\equiv \pm 1[p]$, il s'ensuit que l'homomorphisme $G(p, q) \rightarrow \text{Aut } H_*L(p, q)$ est injectif et donc que $\pi_0 \text{Diff } L(p, q) \cong G(p, q)$.

Si $q \equiv \pm 1[p]$ et $p \neq 2$, le noyau de $G(p, q) \rightarrow \text{Aut } H_*(L(p, q))$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/2$, engendré par σ_+ ou $\tau\sigma_+$, selon que $q \equiv -1$ ou $+1[p]$.

Si $p = 2$, le noyau de $G(p, q) \rightarrow \text{Aut } H_*(L(p, q))$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$, engendré par τ et σ_+ (car σ_- agit non trivialement sur $H_3L(p, q) \cong \mathbb{Z}$).

Pour achever la preuve du théorème 3, il suffit donc de montrer que, si $q \equiv \pm 1[p]$, σ_- est isotope à l'identité ou à τ (selon que $q \equiv -1$ ou $+1[p]$) et que, si en outre $p = 2$, τ est isotope à l'identité. Ceci découle immédiatement du lemme ci-dessous et du fait que tout difféomorphisme de $L(p, q)$ respectant V_1 est isotope à l'identité ou à τ (voir la preuve de la Proposition 2).

LEMME 4. Si $q \equiv \pm 1[p]$, il existe une isotopie de $L(p, q)$ qui échange V_1 et V_2 . Si $p = 2$, il existe en outre une isotopie de $L(2, 1) \cong \mathbb{R}P^3$ qui coïncide avec τ sur $T = \partial V_1 = \partial V_2$.

Démonstration. Le tore solide V_1 est clairement isotope à $U(C_1)$, où C_1 est l'âme $S^1 \times 0$ de $V_1 \cong S^1 \times D^2$ et où la notation $U(X)$ désigne un "petit" voisinage tubulaire de X .

Si $q \equiv \pm 1[p]$, on peut choisir les paramétrages $V_1 \cong V_2 \cong S^1 \times D^2$ de sorte que $r = \pm 1$. La courbe C_1 est isotope à $C = S^1 \times 1$ contenue dans le bord de $V_1 \cong S^1 \times D^2$, laquelle est aussi la courbe paramétrée par $z \in S^1 \rightarrow (z^r, z^r)$ dans le bord de $V_2 \cong S^1 \times D^2$. Puisque $r = \pm 1$, C est isotope à l'âme $C_2 = S^1 \times 0$ de $V_2 \cong S^1 \times D^2$. Comme $U(C_2)$ est isotope à V_2 , on a ainsi exhibé une isotopie envoyant V_1 sur V_2 via $U(C_1)$, $U(C)$ et $U(C_2)$.

Si $p = 2$, alors $L(2, 1) = \mathbb{R}P^3$ et C_1 est isotope à $\mathbb{R}P^1 \subset \mathbb{R}P^2 \subset \mathbb{R}P^3$. Il existe une isotopie de $\mathbb{R}P^2$ qui renverse l'orientation de $\mathbb{R}P^1$ et qui s'étend aisément à $\mathbb{R}P^3$. Composant cette isotopie de $\mathbb{R}P^3$ avec deux isotopies convenables entre V_1 et $U(\mathbb{R}P^1)$, on obtient l'isotopie cherchée.

Ceci achève la démonstration du Lemme 4, et donc du Théorème 3. □

On peut remarquer que l'on a montré au passage que deux difféomorphismes de $L(p, q)$ sont isotopes si et seulement si ils sont homotopes (en fait si et seulement si ils ont même action sur l'homologie).

§2. PLANS PROJECTIFS GENERALISES

Considérons $L(p, q) = V_1 \cup_\theta V_2$ comme au §1.

Soit D_1 le disque méridien $1 \times D^2$ de $V_1 \cong S^1 \times D^2$. Son bord est aussi la courbe de $V_2 \cong S^1 \times D^2$ paramétrée par $z \in S^1 \rightarrow (z^p, z^q)$. Considérons alors le sous-complexe Δ de $L(p, q)$ formé de l'union de D_1 et de la partie de $V_2 \cong S^1 \times D^2$ paramétrée par $(z, \rho) \in S^1 \times [0, 1] \rightarrow (z^p, \rho z^q)$. On peut penser à Δ comme étant l'image de D_1 par une isotopie contractant V_2 sur un voisinage infinitésimalement petit de son âme.

Le sous-complexe Δ de $L(p, q)$ est une sous-variété lisse en dehors d'une courbe fermée de points singuliers Σ (l'âme de V_2), le long de laquelle viennent se joindre p feuillet distincts. La Fig. 1 représente l'allure de Δ près d'un point singulier (avec $p = 5$).

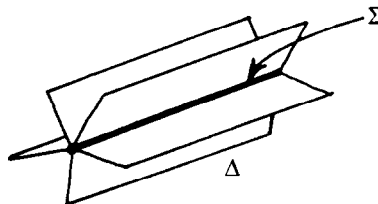


Fig. 1.

Abstraitement, Δ est isomorphe au quotient du disque D^2 par la relation d'équivalence qui identifie sur le bord z_1 et $z_2 \in S^1$ quand $z_1^p = z_2^p$. Si $p = 2$, Δ est ainsi isomorphe au plan projectif $\mathbb{R}P^2$. Pour cette raison, un tel complexe abstrait $\cong D^2 / (z \in S^1 \sim z \xi_p)$, où ξ_p est une racine primitive p -ième de l'unité et où $p \geq 2$, sera appelé un *plan projectif généralisé*. Dans les cas dégénérés (et exclus) où $p = 0, 1$, Δ est une sphère ou un disque.

La petite scholie suivante montre que Δ contient un maximum d'informations sur la structure de l'espace qui le contient.

PROPOSITION 5. Une variété orientable M de dimension 3 qui est première (= qui n'admet que des décompositions en somme connexe triviales) et qui contient un plan projectif généralisé Δ est un espace lenticulaire. En outre, $M - \Delta$ est une boule.

Démonstration. Exercice. Considérer un voisinage régulier de Δ . □

Un corollaire du Théorème 1 est par ailleurs que M contient au plus deux plans projectifs généralisés, à isotopie près.

§3. PLAN DE LA DEMONSTRATION DU THEOREME 1

Dans l'espace lenticulaire $L(p, q)$, on considère deux tores T et T' , séparant chacun $L(p, q)$ en deux tores solides, et on veut montrer que T et T' sont isotopes.

Nous allons traiter T et T' de façon différente. Si T sépare $L(p, q)$ en V_1 et V_2 , on peut construire comme au §2 une application $i : D \rightarrow L(p, q)$, où D est un disque, telle que $i(\partial D)$ est l'âme de V_2 , $i|\partial D : \partial D \rightarrow i(\partial D)$ est un revêtement à p feuilletés et $i|_{\text{int}(D)}$ est un plongement évitant $i(\partial D)$. Ainsi, $i(D)$ est un plan projectif généralisé et T est isotope à $\partial U(i(\partial D))$.

Pour T' , on choisit au contraire une fonction de Morse ordonnée $f : L(p, q) \rightarrow \mathbb{R}$, possédant exactement un point critique pour chacun des indices 0, 1, 2, 3 et telle que T' est isotope aux surfaces de niveau situées entre les valeurs critiques d'indice 1 et 2. La construction de f s'effectue aisément à partir d'une fonction de Morse convenable sur le tore solide standard.

L'idée consiste alors à isotoper le plan projectif généralisé $i(D)$ de sorte que sa courbe singulière $i(\partial D)$ soit aussi simple que possible vis-à-vis de la fonction de Morse f . Cette stratégie est justifiée par le lemme suivant.

LEMME 6. *Si $i(\partial D)$ est dans une surface de niveau de f , alors T et T' sont isotopes.*

Démonstration. La preuve du Lemme 6 que nous donnons ici est une simplification, due à L. Siebenmann, de notre preuve originale. Celle-ci passait par la construction d'une fibration de Seifert convenable sur le complémentaire de $i(\partial D)$ dans $L(p, q)$, qui est un tore solide ouvert.

Par une légère isotopie de la courbe $i(\partial D)$, on peut supposer que la surface de niveau qui la contient est non-singulière. Comme $i(\partial D)$ représente un générateur de $H_1(L(p, q)) \cong \mathbb{Z}/p \neq 0$, le niveau correspondant est situé entre les valeurs critiques d'indices 1 et 2 (sinon, $i(\partial D)$ serait contenue dans une sphère et serait donc homologue à 0). Après isotopie, on peut ainsi se ramener au cas où la surface de niveau contenant $i(\partial D)$ est exactement T' . La courbe $i(\partial D)$ ne sépare pas T' , puisqu'elle n'est pas homologue à 0 dans $L(p, q)$, et elle découpe donc le tore T' en un anneau.

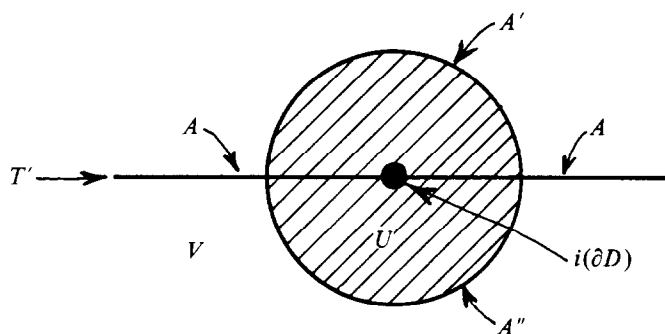


Fig. 2.

Soit U un petit voisinage tubulaire de $i(\partial D)$ et soit V l'adhérence du complémentaire de U dans $L(p, q)$. On utilise maintenant un lemme facile (voir par exemple [11], Lemma 2.3) qui affirme la chose suivante: Un anneau A proprement plongé dans un tore solide V est, ou bien compressible (et alors l'application $\pi_1(A) \rightarrow \pi_1(V)$ est nulle), ou bien parallèle à l'un des deux anneaux découpés par ∂A sur ∂V . En appliquant ce lemme à l'anneau $A = V \cap T'$, on en conclut que $V \cap T'$ est parallèle dans V à l'un des deux anneaux A' et A'' découpés

par T' sur $\partial V = \partial U$ (la première éventualité du lemme ne peut se produire car A contient une courbe isotopie à $i(\partial D)$, laquelle est non-triviale dans $\pi_1 L(p, q)$). Par exemple, $V \cap T'$ est parallèle à A' , et $\partial U = A' \cup A''$ est ainsi isotopie à $(V \cap T') \cup A''$ (modulo lissage). En "aplatissant" A'' sur $U \cap T'$ à travers U , on a ainsi construit une isotopie de ∂U à T' . Comme ∂U était isotopie à T par construction, ceci démontre le Lemme 6. \square

§4. SINGULARITES PERMISES-SINGULARITES ESSENTIELLES

Soient $i : D \rightarrow L(p, q)$ et $f : L(p, q) \rightarrow \mathbb{R}$ comme au paragraphe précédent. Après composition de i par une petite isotopie de $L(p, q)$, on peut supposer que $i(D)$ est "générique", en ce sens que $i(D)$ évite les quatre points critiques de f et que les singularités de $f \circ i$ sont de Morse, c'est-à-dire de type centre ou selle sur $\text{int}(D)$ et de type demi-centre ou demi-selle sur le bord. La Fig. 3 présente l'allure de ces divers types de singularités (f étant représentée par la fonction hauteur, au signe près), ainsi que des feuilletages induits sur D ; dans le cas des singularités sur le bord, on n'a pas représenté les $(p - 1)$ autres feuilletés attenants à la courbe singulière $i(\partial D)$ du plan projectif généralisé $i(D)$.

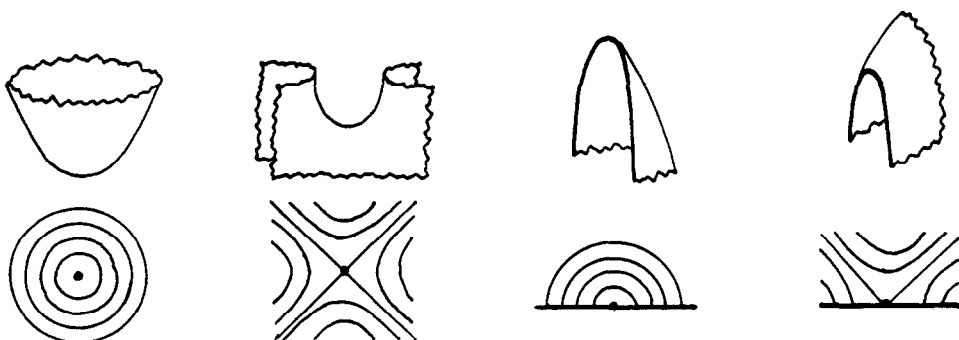


Fig. 3. Centre; Selle; Demi-centre; Demi-selle.

En outre, on peut imposer par genericité que les singularités de f sur $i(D)$ sont situées à des niveaux différents. Pour $f \circ i$, ceci entraîne que deux singularités $x \neq y$ ont des images par f distinctes sauf si x et y sont toutes deux sur le bord et $i(x) = i(y) \in i(\partial D)$. En particulier, aucune feuille du feuilletage (singulier) de D induit par $f \circ i$ ne joint deux selles distinctes.

Pour (uniquement) la commodité de l'exposition, on se ramène au cas où il n'y a pas de demi-centres. Ceci est toujours possible par une isotopie près des extrémums de $f|_{i(\partial D)}$ après laquelle tous les demi-plans tangents aux feuilletés pointent vers le haut aux maximums de $i(\partial D)$ et vers le bas aux minimums.

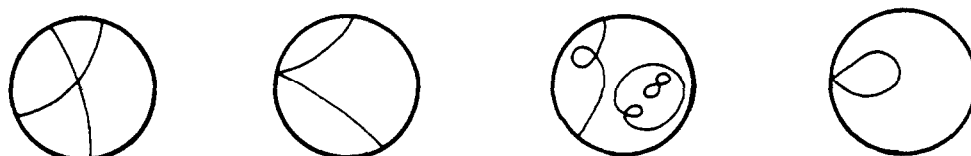


Fig. 4. Selle essentielle; Demi-selle essentielle; Selles inessentielles; Demi-selle inessentielle.

Par définition, une selle (resp. demi-selle) sera *essentielle* si, dans le feuilletage de D induit par $f \circ i$, les quatre (resp. deux) séparatrices qui en sont issues sont distinctes (voir Fig. 4). Les centres seront toujours considérés comme des singularités inessentielles. Un exemple typique de selle inessentielle est constitué par les singularités que l'on introduit quand on crée des petites bosses sur $i(\text{int } D)$.

Contrairement à ce qui se passe dans la preuve de H. Schubert pour les noeuds à deux

ponts ([10], §6, Schritt 1), il ne semble pas exister dans le cadre que nous considérons d'argument simple pour se débarrasser des selles inessentielles. Il faudra donc s'accommoder de leur présence.

§5. DEMONSTRATION DU THEOREME 1

Le but final est de se ramener au cas où l'on peut appliquer le Lemme 6, et l'idée générale consiste à diminuer par isotopie le nombre de points critiques de $f|i(\partial D)$ en utilisant le feuilletage (singulier) de D induit par $f \circ i$ comme guide.

Par définition, les 4 séparatrices issues d'une selle essentielle de ce feuilletage sont distinctes, aboutissent chacune en un point de ∂D et par conséquent découpent D en quatre *quartiers* (voir Fig. 4).

De façon similaire, les deux séparatrices (distinctes) issues d'une demi-selle essentielle découpent D en trois morceaux, deux *demi-disques* contenant chacun exactement une séparatrice et un troisième morceau contenant les deux séparatrices et auquel on ne donnera aucun nom particulier car il n'interviendra pas dans la preuve (voir Fig. 4).

Considérons l'ensemble formé de tous les quartiers et demi-disques ainsi associés à toutes les singularités essentielles du feuilletage de D défini par $f \circ i$. Il contient un élément D_1 (un quartier ou un demi-disque) qui est minimal pour l'inclusion. Si tous les singularités sont inessentielles, on prend $D_1 = D$; on verra toutefois ci-dessous que l'hypothèse $p \geq 2$ exclut cette possibilité.

Le lemme suivant est crucial dans la démonstration.

LEMME 7. *L'intérieur de D_1 contient exactement une demi-selle. En particulier, $D_1 \neq D$ et la restriction de i à l'intérieur de l'arc $D_1 \cap \partial D$ est injective.*

Démonstration. Soit E le complémentaire dans ∂D de l'ensemble constitué des demi-selles essentielles et des extrémités des séparatrices issues de singularités essentielles. Considérons $\omega: E \rightarrow E$ définie par: Si x est l'extrémité d'une feuille lisse, $\omega(x)$ est l'autre extrémité de cette feuille; si x est l'extrémité d'une séparatrice issue d'une selle inessentielle, $\omega(x)$ est l'extrémité de l'autre séparatrice issue de la même selle qui aboutit au bord; si x est une demi-selle, $\omega(x) = x$. La fonction ω est continue et localement injective (en fait, c'est même un difféomorphisme involutif de E).

Dans l'intérieur de $D_1 \cap \partial D$, il y a au moins un extrémum de $(f \circ i)|\partial D$, c'est-à-dire une demi-selle x_0 . Par minimalité de D_1 , cette demi-selle est nécessairement inessentielle et donc $x_0 \in E$ et $\omega(x_0) = x_0$.

Soit $t \mapsto \gamma(t) \in \partial D$ un chemin monotone issu de $x_0 = \gamma(t_0)$, et soit t_1 la première valeur de $t > t_0$ pour laquelle l'un des deux accidents suivants se produisent:

- (a) $\gamma(t_1) \notin E$.
- (b) $\gamma(t_1) \in E$ est une demi-selle (nécessairement inessentielle).

En fait, le cas (b) ne peut se produire: Sinon $\omega \circ \gamma|_{[t_0, t_1]}$ définit un autre chemin monotone issu de x_0 , mais partant en sens opposé à γ . D'autre part, ce chemin ne rencontre $\gamma([t_0, t_1])$ qu'en ses extrémités (car $\omega(x) = x \Leftrightarrow x$ est une demi-selle). Alors, ∂D serait l'union de ces deux chemins et ne contiendrait que deux demi-selles, à savoir $x_0 = \gamma(t_0)$ et $x_1 = \gamma(t_1)$. Mais ceci contredirait la remarque que, si la restriction de $f \circ i$ à ∂D admet $n \geq 2$ extrémums, la restriction de $f \circ i$ à ∂D admet $pn \geq 4$ extrémums (= demi-selles). Donc, seul le cas (a) peut se produire (remarquer que l'hypothèse $p \geq 2$ est ici nécessaire).

Dans le cas (a), $x_1 = \gamma(t_1)$ est situé sur la même feuille qu'une singularité essentielle. De la définition de t_1 il s'ensuit aisément que l'un des trois ou quatre morceaux de D découpés par les séparatrices de cette singularité rencontre ∂D le long de l'adhérence de $\gamma([t_0, t_1]) \cup \omega \circ \gamma([t_0, t_1])$. Par minimalité de D_1 , ce morceau de D est D_1 lui-même et l'intérieur de $D_1 \cap \partial D$ contient donc une seule demi-selle, $x_0 = \gamma(t_0)$.

Ceci prouve la première assertion.

La restriction $\text{int}(D_1 \cap \partial D) \rightarrow i(\partial D)$ de i n'est pas surjective: Autrement $\text{int}(D_1 \cap \partial D)$ contiendrait au moins deux demi-selles, envoyées respectivement sur le maximum et le minimum de f sur $i(\partial D)$, ce qui contredirait ce qui précède. Puisque cette restriction de i est une subimmersion de variétés connexes de dimension 1, il s'ensuit qu'elle est injective et que $D_1 \neq D$. \square

L'existence de quartiers ou demi-disques jouissant des propriétés démontrées au Lemme 7 va nous permettre de simplifier $i(D)$ relativement à f . Plus précisément, l'ensemble \mathbb{N}^2 étant muni de l'ordre lexicographique, on va simplifier le couple $(n_d, n_e) \in \mathbb{N}^2$, où n_d (resp. n_e) est le nombre de demi-selles (resp. selles essentielles) du feuilletage de D induit par $f \circ i$, jusqu'à ce que l'on atteigne une situation favorable où une isotopie "évidente" peut amener $i(\partial D)$ dans une surface de niveau de f , situation qui n'est certes plus "de Morse" mais qui permet de conclure la démonstration du théorème 1 grâce au Lemme 6.

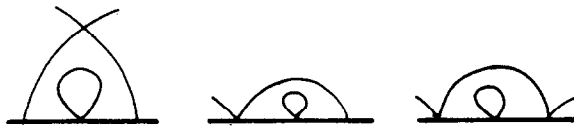


Fig. 5. (a), (b), (c).

Considérons donc un quartier ou demi-disque minimal D_1 comme plus haut. On distingue trois cas, illustrés en Fig. 5, selon que D_1 est un quartier, un demi-disque bordé par la séparatrice d'une demi-selle qui n'aboutit pas à une autre demi-selle, ou un demi-disque bordé par la séparatrice commune à deux demi-selles. Remarquer que le dernier cas ne peut se produire que si la restriction de f à $i(\partial D)$ a exactement deux points critiques (un maximum et un minimum): En effet, les deux demi-selles de $\partial(D_1 \cap \partial D)$ ont même image par f et, par hypothèse de genericité, ont donc même image par i ; donc $i(D_1 \cap \partial D) = i(\partial D)$ et, comme l'intérieur de $D_1 \cap \partial D$ contient une seule demi-selle, $f|_{i(\partial D)}$ n'a que deux points critiques. D'autre part, le lecteur devra garder à l'esprit que les selles inessentiels ne sont pas représentés sur la Fig. 5; ainsi, dans le cas de la Fig. 5(a), l'allure complète du feuilletage peut très bien être comme en Fig. 6.

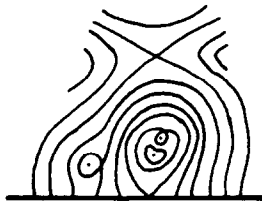


Fig. 6.

Le cas le plus simple est celui de la Fig. 5(b) où l'on peut réduire n_d sans, en vertu de l'ordre lexicographique, avoir à se soucier de l'effet sur n_e . En effet, le Lemme 7 affirme que $i(D_1)$ est un disque plongé dans $L(p, q)$ qui ne rencontre $i(\partial D)$ que le long de l'arc $i(D_1 \cap \partial D)$. Il existe donc une isotopie PL envoyant $i(\partial D)$ sur la courbe PL obtenue en remplaçant dans $i(D)$ l'arc $i(D_1 \cap \partial D)$ par $i(\partial D_1 - \partial D)$. L'arc $i(\partial D_1 - \partial D)$ étant contenu dans une surface de niveau de f , on peut alors par arrondissement construire une isotopie lisse envoyant $i(\partial D)$ sur une courbe lisse "générique" C telle que $f|_C$ a deux points critiques de moins que $f|_{i(\partial D)}$ (voir Fig. 7). Modifiant i par composition avec cette isotopie, on a ainsi réduit le couple (n_d, n_e) pour l'ordre lexicographique (même si n_e peut très bien avoir augmenté).

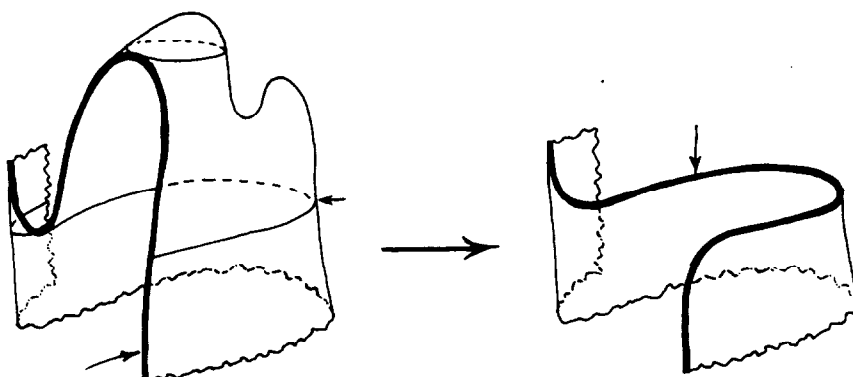


Fig. 7. $D_1, i(\partial D_1 - \partial D), i(\partial D); C = \text{nouveau } i(\partial D).$

Le cas de la Fig. 5(a) nécessite un peu plus de soin. Comme précédemment, il existe une isotopie PL , à support dans un petit voisinage de $i(D_1)$, qui contracte $i(D_1)$ sur lui-même et envoie $i(\partial D)$ sur $(i(\partial D) - i(D_1 \cap \partial D)) \cup i(\partial D_1 - \partial D)$. Après lissage, on a ainsi une isotopie envoyant $i(\partial D)$ sur une courbe lisse C telle que $f|_C$ a le même nombre d'extrémums que $f|i(\partial D)$, dont l'un est situé exactement sur la selle de $i(D)$ contenue dans $i(D_1)$ (voir Fig. 8). Cette isotopie peut être choisie de sorte que, si on l'utilise pour modifier i , la selle et la demi-selle contenues dans D_1 se combinent pour former une seule demi-selle (voir Fig. 8). On a ainsi éliminé la selle essentielle contenue dans D_1 .

Il faut toutefois vérifier que l'on n'a pas introduit de nouvelle selle essentielle. En effet, l'isotopie modifie i au voisinage de D_1 mais aussi au voisinage des $(p-1)$ arcs disjoints dans ∂D qui sont identifiés à $D_1 \cap \partial D$ par i . Pour chacun de ces arcs, l'isotopie remplace l'image par i d'un de ses petits voisinages U par, grosso modo, son union avec une copie de $i(D_1)$. Ceci introduit autant de selles qu'il y avait de selles dans l'intérieur de D_1 , plus une autre selle correspondant au recollement de la demi-selle de U et de la demi-selle de D_1 ; les premières selles sont inessentielles par minimalité de D_1 , et la dernière est inessentielle car la demi-selle de D_1 l'était. La modification de i ainsi introduite réduit donc n_e de une unité sans modifier n_d , et diminue donc le couple (n_d, n_e) pour l'ordre lexicographique.

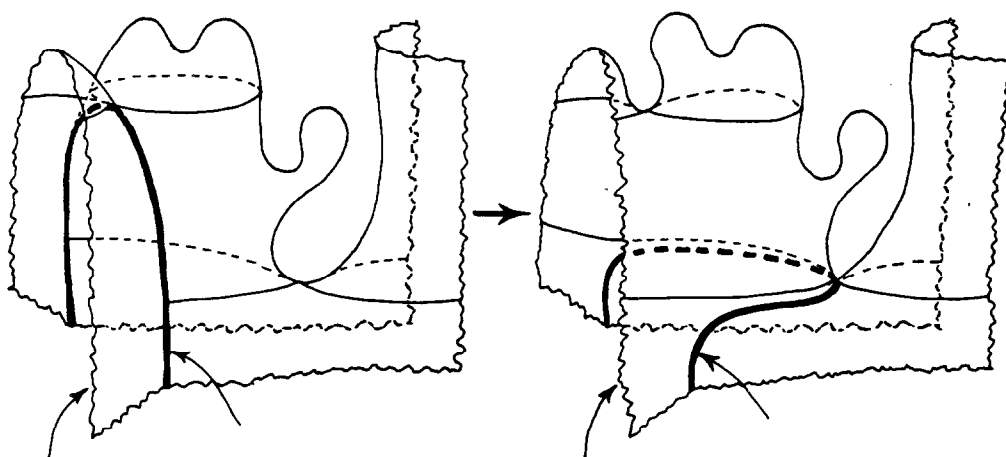


Fig. 8. $i(\partial D)$, Autre feuillet de $i(D)$; Feuillet du nouveau $i(D)$; $C = \text{nouveau } i(\partial D), D_1.$

Enfin, le cas de la Fig. 5(c), où D_1 est un demi-disque et $\partial(D_1 \cap \partial D)$ est constitué de deux demi-selles, est le cas favorable où l'on peut conclure la démonstration. En effet, nous avons vu que $i(D_1 \cap \partial D) = i(\partial D)$. D'autre part, $C = i(\partial D_1 - \partial D)$ est une courbe simple

fermée située dans une surface de niveau de f . L'existence du demi-disque D_1 fournissant une isotopie entre $i(\partial D)$ et C , on peut ainsi se ramener aux hypothèses du Lemme 6, qui achève la démonstration du Théorème 1. \square

Remerciements—Cet article n'aurait pas vu le jour si, par l'intermédiaire de L. Siebenmann nous n'avions tenu de F. Waldhausen que l'unicité des présentations à deux ponts des noeuds était démontrée dans [10].

Qu'ils en soient ici tous deux particulièrement remerciés.

REFERENCES

1. J. BIRMAN et J. RUBINSTEIN: Homeotopy groups of a class of 3-manifolds. *Abstracts A.M.S.* **27** (1980), 773-57-13.
2. A. HATCHER et W. THURSTON: Incompressible surfaces in two-bridge knot complements. A paraître.
3. N. IVANOV: Homotopy of space of automorphisms of some three-dimensional manifolds (traduction anglaise). *Sov. Math. Dokl.* **20** (1979), 47-50.
4. R. KIRBY: Problems in low-dimensional manifold theory. *Proc. Symposia in Pure Mathematics* **32**, Part 2 (1978), 273-312.
5. P. ORLIK, E. VOGT et H. ZIESCHANG: Zur Topologie gefaserner dreidimensionaler Mannigfaltigkeiten. *Topology* **6** (1967), 49-64.
6. K. REIDEMEISTER: Homotopieringe und Linsenräume. *Abh. Math. Sem. Hamburg* **11** (1936), 102-109.
7. J. RUBINSTEIN: On 3-manifolds that have finite fundamental group and contain Klein bottles. *Trans. Am. Math. Soc.* **251** (1979), 129-137.
8. H. SCHUBERT: Knoten und Vollringe. *Acta Math.* **90** (1953), 131-286.
9. H. SCHUBERT: Über eine numerische Knoteninvariante. *Math. Zeit.* **61** (1954), 245-288.
10. H. SCHUBERT: Knoten mit zwei Brücken. *Math. Zeit.* **65** (1956), 133-170.
11. F. WALDHAUSEN: Eine Klasse von 3-dimensionalen Mannigfaltigkeiten, I und II. *Inventiones Math.* **3** (1967), 308-333 et **4** (1967), 87-117.

Département de Mathématique
Université de Paris-Sud, Bât 425
F-91405 Orsay Cedex
France