MAT3550: COURBES ALÉBRIQUES
EXERCISES

(1) Écrivez avec prudence les définitions d'une courbe irréductible et une courbe réductible, des points singuliers, leur ordres, des points d'inflexions, et du multiplicité d'un point d'intersection entre deux courbes algébriques. C'est probablement mieux d'utiliser le définition par le résultant, mais ce n'est pas obligatoire. Comme vous préfèrez pour la dernière question de ce feuille-ci.

(2) Énoncez le Théorème de Bézout, l'inegalité ordre-multiplicité, et les formules qui limite les nombres des points singulier d'une courbe de degrée n

(3) Soit $F(X, Y, Z) = Y^2Z - X(X - Z)(X - 2Z)$. Trouvez les points d'inflexions de $V(F)$.

(4) Soient $p_1, p_2, \dots p_k \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ points, et soient $m_1, m_2, \dots, m_k \in \mathbb{N}$. Montrez qu'il existe une courbe de degrée n pour qui p_i est un point d'ordre m_i, si $n(n+3)/2 \geq \sum_{i=1}^{k} m_i(m_i+1)/2$.

(5) Montrez que chaque cubique qui est l'union de trois droites distincts peut être ramenée, par une transformation projective, en une des deux formes suivantes:
   (i) $XYZ = 0$
   (ii) $XY(X - Y)$.

(6) Questions 6,7,8 de Devoir 2. Trouvez les points singuliers, leurs ordres, et les droites tangentes aux ces points.

(7) Considérez les courbes $\mathcal{C}_1 = V(Y^4 + Y^3Z - X^2Z^2)$ et $\mathcal{C}_2 = V(Y^5 - X(Y^2 - XZ)^2)$ dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. Trouvez les points d'intersections de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ et leur multiplicités. Faisez le comparison avec le Théorème de Bézout.