

## DIFFEOMORPHISMES DES SOMMES CONNEXES EN DIMENSION TROIS

HARRIE HENDRIKS et FRANÇOIS LAUDENBACH

(Received 25 June 1982)

D'APRÈS Kneser [6], toute variété compacte de dimension 3 est somme connexe d'un nombre fini de variétés "premières" c'est-à-dire indécomposables pour cette opération. Dans le cas orientable et fermé, Milnor [7] (voir aussi Kneser [6]) a prouvé l'unicité de la décomposition et le fait que  $S^2 \times S^1$  est la seule variété première non irréductible (il existe une 2-sphère plongée ne bordant pas une boule). L'unicité prouvée par Milnor revêt un sens faible; elle ne signifie pas que deux "configurations en somme connexe" soient "isomorphes". D'ailleurs l'idée des *glissements de Whitehead* permet de décrire des chemins de configurations.

Dans [1], E. César de Sá et C. Rourke expliquent comment comprendre le type d'homotopie de  $\text{Diff } M^3$  en termes de l'espace des configurations et des difféomorphismes des facteurs premiers.

Nous établissons ici des résultats analogues à ceux annoncés dans [1]; la question de l'identité des énoncés n'est pas tranchée.

Le projet de démonstration de [1] reposait sur une technique de disjonction de surfaces incompressibles, mise au point par Hatcher dans [3]. Or cette technique ne s'applique pas à la disjonction des sphères. Plus tard, Hatcher [4] a donné une preuve de [1] dans le cas particulier de  $S^1 \times S^2$ , à l'aide d'une technique de disjonction des sphères. Notre démonstration utilise cette technique, qui, dans notre contexte, doit être réexposée partiellement.

Notre goût pour les choses lisses nous fait parler de difféomorphismes plutôt que d'automorphismes  $PL$ . Bien entendu, l'équivalence repose sur la conjecture de Smale  $PL(3) \sim O(3)$ , prouvée par Hatcher [5]. Pour éviter un recours à ce grand théorème, le lecteur peut remplacer dans la suite  $\text{Diff}$  par  $PL$ .

Notre considération va à Eugénia César de Sá et à Colin Rourke qui restent les initiateurs de ce sujet. Nous remercions Allen Hatcher de nous avoir communiqué rapidement ses réflexions. Enfin, nous remercions Francis Bonahon, François Latour et Frans Clauwens pour de nombreuses conversations.

### §1. ENONCE DES RESULTATS

1.1. Nous nous limitons aux variétés de dimension 3 compactes orientables. Celles-ci sont parallélisables [9]. Dans la suite, toutes les variétés seront *parallélisées*. D'énormes complications, en particulier la preuve de la proposition 4.7, vont découler de cette contrainte, mais, si on l'abandonnait, les rotations le long des sphères de sommes connexes pourraient à la fois être vues comme résultats de glissements et comme difféomorphismes des facteurs, ce qui rendrait impossible le théorème de scindement que nous avons en vue. Pour simplifier notre discussion préliminaire, nous considérons seulement les variétés sans anses (= facteurs  $S^1 \times S^2$ ).

Au §2, nous définirons avec précision l'espace des configurations d'une variété  $M$ . Au départ, on se donne une liste de  $n$  variétés irréductibles  $P_1, \dots, P_n$  que l'on désignera sous le terme de facteurs. La variété  $P_0 = S^3_+$ , l'hémisphère nord de la 3-sphère, constitue un facteur original, appelé le *coeur*. Un point de l'espace de configurations  $C$  de  $M$  prescrit une façon de réaliser la variété  $M$  comme la somme connexe successive (dans un ordre arbitraire) des  $n + 1$  facteurs  $P_i$  et d'un nombre quelconque de facteurs triviaux  $S^3$ . Chaque opération de somme connexe se fait à l'aide d'un tube (= "bras") et l'une quelconque des tranches de ce tube est dite "sphère de somme connexe".

Les configurations permises dans  $C$  ne privilégient aucun point; les attachements sont simplement astreints à une condition de cohérence vis-à-vis des parallélisations. Lorsque des facteurs fermés sont difféomorphes, il y a naturellement deux espaces de configurations possibles; celui que nous choisissons rend *indiscernables* les facteurs fermés difféomorphes.

A chaque point  $c$  de  $C$  est associé une variété  $M_c$  construite explicitement, dans laquelle se trouve  $\bigcup_{i=0}^n \partial P_i$ . Si  $*$  est un point-base de  $C$ , bien sûr  $M_*$  et  $M_c$  sont difféomorphes mais pas de façon canonique.

Un difféomorphisme extérieur  $\alpha$  de  $M_*$  est donné par une configuration  $c \in C$  et un difféomorphisme  $f_c: M_* \rightarrow M_c$  avec  $f_c|_{\bigcup_{i=0}^n \partial P_i} = Id$ . Cette donnée est un élément de  $\text{Diffext}(M_*)$ , brièvement  $\text{Diffext}$ . Bien noter que notre théorie "fixe" le bord.

1.2. PROPOSITION. *La flèche d'oubli  $q: \text{Diffext} \rightarrow C$  est une fibration principale d'ensembles simpliciaux dont le groupe structural est  $\text{Diff}_c(M_*)$ , le groupe des difféomorphismes  $f: M_* \rightarrow M_*$  avec  $f|_{\partial M_*} = Id$ . La base est connexe.*

La construction de relèvement des lacets donne alors le corollaire standard suivant:

COROLLAIRE. *On a une fibration principale:*

$$\Omega C \rightarrow \text{Diff}_c(M_*) \rightarrow \text{Diffext}(M_*),$$

où  $\Omega C$  désigne l'espace des lacets de  $C$  basés en  $*$ .

*Remarque.* On vérifie facilement que cette dernière fibration n'a pas en général le type d'homotopie d'une fibration produit, car il peut exister des lacets non triviaux de  $C$  qui se relèvent en lacets de  $\text{Diffext}$ .

1.3. Le §3 est consacré au calcul de  $\text{Diffext}(M_*)$ . On choisit pour  $*$  une configuration où chaque facteur  $P_i$  est directement attaché sur le coeur par un disque  $D_i$  de  $P_i$  dont le centre va servir de point-base pour  $P_i$ . On voit dans  $M_*$  un système  $\Sigma$  de sphères de sommes connexes. On dit qu'un difféomorphisme extérieur  $f_c: M_* \rightarrow M_c$  est *adapté* si  $M_c$  contient un système de sphères  $\Sigma_c$ , sphères de somme connexe pour chacune des opérations construisant  $M_c$  et si  $f_c(\Sigma)$  est disjoint de  $\Sigma_c$  (voir §3.3). L'ensemble des difféomorphismes extérieurs adaptés est noté  $\text{Diffextad}$ . D'autre part,  $\text{Diffstand}(-)$  désigne l'ensemble des difféomorphismes, identité sur le bord, dont la dérivée au point-base respecte strictement la parallélisation, le point-base pouvant bouger. On a des inclusions naturelles

$$\prod_1^n \text{Diffstand}(P_i) \hookrightarrow \text{Diffextad} \hookrightarrow \text{Diffext}.$$

La composition de ces inclusions sera notée  $h$ .

PROPOSITION. *L'inclusion  $\prod_1^n \text{Diffstand}(P_i) \hookrightarrow \text{Diffextad}$  est une équivalence d'homotopie faible.*

Cette proposition est essentiellement une expression de la conjecture de Smale. En revanche, le théorème suivant, fondé sur la technique de disjonction due à Hatcher, n'utilise pas la conjecture de Smale.

THEOREME 1. *L'inclusion  $\text{Diffextad} \hookrightarrow \text{Diffext}$  est une équivalence d'homotopie faible.*

C'est pour faire marcher la technique de Hatcher que nous sommes conduits à introduire un espace de configurations plus générales que dans [1]. La contrepartie: la fibration du corollaire 1.2 ne scinde pas. Pour retrouver une fibration scindée, on opère comme suit.

1.4. Lorsque les facteurs fermés sont tous deux à deux non difféomorphes, nous

construirons au §4 une fibration  $p: C \rightarrow \prod_{i=1}^n \text{int } P_i$  (avec l'abus de langage qui identifie un espace topologique et son complexe singulier) telle que  $p \circ q \circ h: \prod_{i=1}^n \text{Diffstand}(P_i) \rightarrow \prod_{i=1}^n \text{int } P_i$  provienne des applications  $\text{Diffstand } P_i \rightarrow \text{int } P_i$  donnant la valeur au point-base. En prenant  $C_1$  comme la fibre de  $p$  et  $q_1: \text{Diffext}_1 \rightarrow C_1$  la restriction de  $q$  à  $C_1$ , on a  $\text{Diffext}_1 \simeq \prod_{i=1}^n \text{Diff}_c(P_i \text{ mod } D_i)$  et une inclusion de  $\prod_{i=1}^n \text{Diff}_c(P_i \text{ mod } D_i)$  dans  $\text{Diff}(M_*)$ . Dans le cas général, nous avons recours à une fibration  $p: \tilde{C} \rightarrow \prod_{i=1}^n \text{int } P_i$  où  $\tilde{C}$  est un revêtement de  $C$ , essentiellement en introduisant les configurations obéissant à une notion de discernabilité. Nous en déduisons au §5:

**PROPOSITION.** *Il y a un sous-complexe  $C_1 \subset C$  tel que la fibration  $q_1: \text{Diffext}_1 \rightarrow C_1$  induite de  $q$  ait un espace total du type d'homotopie de  $\prod_{i=1}^n \text{Diff}_c(P_i \text{ mod } D_i)$ .*

La construction du relèvement des lacets donnera lieu au théorème suivant, analogue à celui annoncé dans [1].

**THEOREME 2.** *Lorsque  $M$  est sans anses, il existe une fibration principale, triviale en homotopie:*

$$\Omega C_1 \rightarrow \text{Diff}_c(M_*) \rightarrow \prod_{i=1}^n \text{Diff}_c(P_i \text{ mod } D_i).$$

Elle admet une section en prolongeant les difféomorphismes donnés sur chaque  $P_i$  par l'identité sur le coeur.

**COROLLAIRE.**  $\prod_{i=1}^n \text{Diff}_c(P_i \text{ mod } D_i)$  est, pour le type d'homotopie faible, un rétracte de  $\text{Diff}_c(M_*)$ .

*Remarque.* Pour l'espace  $C'$  des configurations proposées par [1], il existe une inclusion  $C' \subset C_1$ . Nous savons montrer que c'est une équivalence faible d'homotopie dans le cas particulier  $M = P_1 \# P_0 \# P_2$ . Nous ne savons pas ce qu'il en est dans le cas général.

Le cas où la variété possède des anses sera étudié au §5.

## §2. L'ESPACE DES CONFIGURATIONS

2.1. La sphère  $S^3$  est vue comme groupe de Lie des quaternions de module 1; l'élément neutre est noté  $e$ . Notons  $\xi$  le champ de repères invariant à gauche sur  $S^3$  et  $B(\rho)$  la boule géodésique de rayon  $\rho$  centrée en  $e$ .

Soit  $M$  une variété de dimension 3 munie d'une parallélisation  $\tau$ . On dit qu'un plongement  $\varphi: B(\rho) \rightarrow M$  est *standard* si  $\varphi^*(\tau)(e) = \xi(e)$ . Le centre est  $\varphi(e)$ ; l'image, pointée par le centre, est une *boule standard*.

Les affirmations suivantes sont bien connues. L'espace des plongements standard dont le centre est fixé est contractible. L'espace des plongements standard est un fibré principal au-dessus de l'espace des boules standard.

### 2.2. Bras de somme connexe

Observons d'abord que la boule  $S^3 - \text{int } B(\rho) = B^c(\rho)$  est isomorphe comme variété parallélisée à  $B(\pi - \rho)$  par l'involution antipodale de  $S^3$  qui invarie  $\xi$ . Etant donné  $0 < \rho_1 < \rho_2 < \pi$ , le bras  $L(\rho_1, \pi - \rho_2)$  est la réunion de  $B(\rho_1)$ ,  $B^c(\rho_2)$  et de l'anneau  $S^2 \times [\rho_1, \rho_2]$  de sorte que les sphères  $S^2 \times \{\rho_i\}$ ,  $i = 1, 2$ , soient des lieux de rebroussement: un vecteur tangent

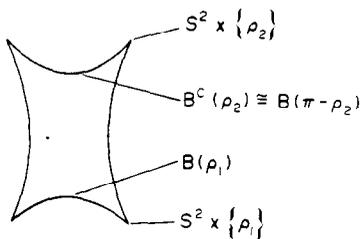


Fig. 1.

rentrant dans l'anneau est aussi rentrant dans la boule (voir fig. 1). Les coordonnées "normales" identifient  $S^2 \times \{\rho\}$  au bord  $B(\rho)$ . Ce paramétrage du bras le munit d'un fibré trivialisé  $T$  dont la restriction à  $S^2 \times \{\rho\}$  est le tangent de  $B(\rho)$  restreint au bord; au-dessus de  $B(\rho_1)$  et  $B^c(\rho_2)$ ,  $T$  est donné comme fibré tangent; sur tout le bras,  $T$  est trivialisé par  $\xi$ . D'autre part, le bras admet un fibré tangent  $\tau$ . Les fibrés  $T|_{S^2 \times \{\rho\}}$  et  $\tau|_{S^2 \times \{\rho\}}$  contiennent tous les deux le tangent à  $\partial B(\rho)$  comme sous-fibré; la symétrie orthogonale par rapport à ce sous-fibré,  $\rho$  variant de  $\rho_1$  à  $\rho_2$ , fournit un isomorphisme global de  $T$  à  $\tau$ , qui se prolonge par l'identité au-dessus des deux boules extrêmes. Dans la suite nous utiliserons cet isomorphisme pour faire de  $T$  le fibré tangent au bras. Cette structure fait jouer un rôle symétrique aux deux extrémités: l'involution antipodale de  $S^3$  induit un isomorphisme de  $L(\rho_1, \rho_2)$  sur  $L(\rho_2, \rho_1)$ . La quantité  $\pi - (\rho_1 + \rho_2)$  s'appelle la *longueur* du bras.

2.3. *Somme connexe*

Soient  $(M, \tau)$  une variété parallélisée et  $\varphi: B(2\rho) \rightarrow M$  un plongement standard. On veut d'abord construire sur  $M$  une parallélisation  $\tau_\varphi$  qui coïncide avec  $\tau$  sur  $M - \text{Im } \varphi$  et avec  $\varphi_*(\xi)$  sur  $\varphi(B(\rho))$ . Pour cela on observe que  $\varphi^*(\tau)(x) = \gamma_\tau(x)\xi(x)$  où  $\gamma_\tau: B(2\rho) \rightarrow GL_3(\mathbb{R})$ . Soit  $\alpha: [0, 2] \rightarrow [0, 1]$  une fonction  $C^0$  (car  $C^1$  est impossible), vérifiant  $\alpha(r) = 1$  pour  $r \leq 1$ ,  $r\alpha(r) \leq 1$  pour tout  $r$ , et  $\alpha(r) = 0$  pour  $r$  proche de 2. On pose alors:

$$\varphi^*(\tau_\varphi)(x) = \gamma_\tau \left( \alpha \left( \frac{\|x\|}{\rho} \right) x \right)^{-1} \gamma_\tau(x)\xi(x);$$

ici  $\|x\|$  désigne la distance géodésique au centre de la boule. Noter que, pour  $\|x\| \leq 2\rho$ ,

$$\left\| \alpha \left( \frac{\|x\|}{\rho} \right) x \right\| \leq \rho.$$

Soient  $(M_1, \tau^1)$  et  $(M_2, \tau^2)$  deux variétés parallélisées; soient  $\varphi_i: B(2\rho_i) \rightarrow M_i$  deux plongements standard avec  $\rho_i < \pi/2$ . L'objet singulier  $M_1 \cup L(\rho_1, \rho_2) \cup M_2$ , où  $B(\rho_i)$  est collé à  $M_i$  par  $\varphi_i$  ( $i = 1, 2$ ) possède un fibré tangent parallélisé par  $\tau_{\varphi_i}^i$  sur  $M_i$  et par  $\xi$  sur le bras. En retirant l'intérieur des boules standard, on obtient une *réalisation* de la somme connexe  $M_1 \# M_2$  qui est munie d'une parallélisation. Une partie de  $M_i - \text{int } \varphi_i(B(2\rho_i))$  sera dite *visible* dans la somme connexe.

2.4. *Articulation*

La somme connexe avec  $(S^3, \xi)$  ne sera pas considérée comme une opération triviale. La 3-sphère présente dans cette structure s'appelle une *articulation*;  $S^3$  y est vue de façon homogène: nous identifierons toutes les structures  $M \# qS^3, \forall q \in S^3$ .

Nous dirons que  $\varphi: B(\rho) \rightarrow S^3$  est *isométrique* si  $\varphi^*(\xi) = \xi$ ; dans ce cas  $\xi_\varphi = \xi$ . Donc, pour coller un bras à  $S^3$  par  $\varphi$ , la donnée d'un prolongement de  $\varphi$  à la boule de rayon  $2\rho$  est inutile. Mais alors on peut abandonner la condition  $\rho < \pi/2$  lorsque le bras est attaché isométriquement sur une articulation. La partie  $S^3 - \text{int } \varphi(B(\rho))$  s'appelle la *partie visible de l'articulation* dans la somme connexe. Par opposition à ces attachements isométriques, les autres seront dits *mous*.

Maintenant, on peut réaliser la somme connexe  $M \# S^3$  à partir de  $M \cup L(\rho_1, \rho_2) \cup S^3$ , avec  $\rho_1 + \rho_2 = \pi, \rho_1 < \pi/2$  (bras de longueur nulle ou *dégénéré*). Cette opération a seulement l'effet de modifier la parallélisation  $\tau$  de  $M$  dans la boule  $\varphi_1(B(2\rho_1))$ .

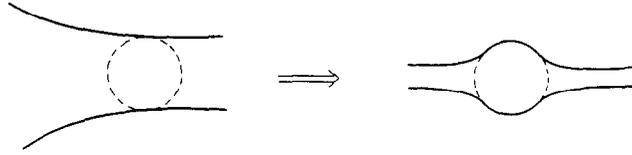


Fig. 2.

D'autre part, étant donné  $\rho_0 \in ]\rho_1, \pi - \rho_2[$ , on peut considérer que  $L(\rho_1, \rho_2)$  est obtenu comme somme connexe  $L(\rho_1, \pi - \rho_0) \# S^3 \# L(\rho_0, \rho_2)$  où le bras droit est attaché sur  $B(\rho_0)$  dans  $S^3$  et où le bras gauche est attaché sur  $B^c(\rho_0)$ . Dans cette structure l'articulation est invisible. Elle se déforme en  $L(\rho_1, \pi - \rho_0 - \delta) \# S^3 \# L(\rho_0 - \delta, \rho_2)$  (voir fig. 2).

**2.5. Déformation d'une configuration de somme connexe et difféomorphisme extérieur**

Soient  $(M_1, \tau_1)$  et  $(M_2, \tau_2)$  deux variétés parallélisées. Une configuration  $c$  de somme connexe est donnée, pour  $i = 1, 2$ , par un plongement standard de type mou  $\varphi_i: B(2\rho_i) \rightarrow M_i$  ou un plongement isométrique  $\varphi_i: B(\rho_i) \rightarrow M_i$  à condition que l'image de la boule soit dans la partie visible d'une articulation. Le passage du type mou à l'isométrique (2.4) est autorisé seulement si  $\varphi_i(B(2\rho_i))$  se trouve dans la partie visible d'une articulation. (Nous ouvrons ici une parenthèse pour regretter de ne pas savoir manier les sommes connexes non-standard faites à l'aide de boules infinitésimales.) Notons  $M_c = (M_1 \# M_2)_c$  la réalisation de la somme connexe. Pour deux configurations  $c$  et  $c'$  un difféomorphisme  $M_c \rightarrow M_{c'}$  sera dit extérieur. Il y a deux façons de déformer  $c$ : par isotopie des attachements ou par déformation du bras. Nous allons définir précisément ce qu'est un  $k$ -simplexe de configurations  $c(t), t \in D^k$ .

1er type. Les rayons  $\rho_1$  et  $\rho_2$  étant fixés, on donne un  $k$ -simplexe  $\varphi_i(t)$  de plongements standard  $B(2\rho_i) \rightarrow M_i$ . Par extension des isotopies, on obtient une famille  $f(t)$  de difféomorphismes extérieurs  $M_{c(t_0)} \rightarrow M_{c(t)}$  qui par définition constitue un  $k$ -simplexe de difféomorphismes extérieurs.

2e type. Les rayons  $\rho_i(t)$  varient régulièrement et  $\varphi_i(t) = \varphi_i|_{B(2\rho_i(t))}$  où  $\varphi_i$  est défini sur  $B(2\rho_i)$  avec  $\rho_i > \rho_i(t)$ . On a des difféomorphismes canoniques

$$B(\rho_1) \# L(\rho_1(0), \rho_2(0)) \# B(\rho_2) \rightarrow B(\rho_1) \# L(\rho_1(t), \rho_2(t)) \# B(\rho_2),$$

$C^\infty$ -tangents à l'identité au bord, donnant donc des difféomorphismes extérieurs  $f(t): M_{c(t_0)} \rightarrow M_{c(t)}$ ; par définition, les  $f(t)$  forment un  $k$ -simplexe.

En présence de plongements isométriques, on utilise les boules de simple rayon; dans le 2e type, noter que  $B(\rho_i)$  n'est plongé isométriquement que sur sa partie  $B(\rho_i(t))$ .

Dans un simplexe du 2e type, on permet que  $\rho_1(t)$  s'annule pour  $t = t_0$ , dans les conditions suivantes:  $\rho_2(t_0) = \pi$ , et pour  $t$  voisin de  $t_0, \rho_1(t) + \rho_2(t) = \pi$  (bras dégénéré) et  $M_2$  est une articulation. Pour  $t = t_0$ , l'articulation n'a qu'un point visible qui est identifié à un point de  $M_1$  (fig. 3).

Simplexe général. On peut composer ces deux types de déformation, ce qui donne le  $k$ -simplexe général  $c(t)$  avec un relèvement  $f(t): M_{c(t_0)} \rightarrow M_{c(t)}$  dans l'espace des difféomorphismes extérieurs. Le  $k$ -simplexe général de difféomorphismes extérieurs est obtenu en composant celui-ci avec un  $k$ -simplexe de  $\text{Diff } M_{c(t_0)}$ . La définition que nous obtenons ainsi ne dépend pas du choix de  $f(t)$  dans le 1er type.

**2.6. Ensemble des configurations**

Nous avons la collection des facteurs irréductibles parallélisés  $P_1, \dots, P_n$  et le coeur  $P_0 = S^3_+$  avec la parallélisation  $\xi$  de  $S^3$ . Si deux facteurs fermés  $P$  et  $P'$  sont difféomorphes

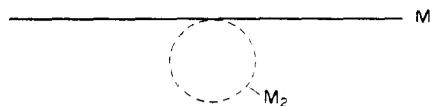


Fig. 3.

comme variétés orientées, on choisit une fois pour toutes un difféomorphisme entre eux et la parallélisation de chacun est construite pour que ce difféomorphisme la respecte. On écrira  $P = P'$ .

Un point  $c$  de l'ensemble des configurations  $C$  est décrit par les données suivantes:

—  $m$  articulations et  $n + m + g$  bras.

— Notant  $M_c^0$  la réunion disjointe des facteurs et des articulations, on fabrique  $M_c^1$  en reliant certaines composantes de  $M_c^0$  par des bras. Les attachements se font le long de boules standard selon le procédé décrit en 2.3. On impose que les boules soient mutuellement disjointes. Les bras dégénérés  $L(\rho, \pi - \rho)$  et  $L(0, \pi)$  sont admis dans les conditions prescrites en 2.4. et 2.5.

— La donnée de  $c$  prescrit de la même façon la construction de  $M_c^2, \dots$  jusqu'à épuisement de tous les bras. La variété finale  $M_c$  est difféomorphe à  $P_0 \# P_1 \# \dots$

$\# P_n \# \left( \#_{i=1}^g (S^1 \times S^2)_i \right)$ .

*Relation d'équivalence*, engendrée par les opérations suivantes:

— Insertion d'une articulation invisible dans un bras.

— Cancellation de  $L(0, \pi) \# S^3$ .

— Identification de deux articulations reliées par un bras dégénéré attaché isométriquement.

— Echange des facteurs fermés  $P_i$  et  $P_j$  si  $P_i = P_j$ , tous les attachements sur  $P_i$  devenant des attachements sur  $P_j$  via le difféomorphisme d'identification.

— Changer l'ordre des opérations: si un bras attaché à  $M_c^k$  a ses boules (de rayon double) dans la partie de  $M_c^{k-1}$  visible dans  $M_c^k$ , ce bras peut être attaché à  $M_c^{k-1}$ .

### 2.7. Difféomorphismes extérieurs et structure quasi-simpliciale

Par définition, dans un petit  $k$ -simplexe  $c(t), t \in D^k$ , de  $C$ , le nombre d'articulations et l'ordre des attachements sont indépendants de  $t$  pour des représentants bien choisis de  $c(t)$ . La famille est alors donnée par une isotopie des attachements et par une variation des rayons des boules extrêmes. Précisément,  $M_{c(t)}^0$  est constant et  $M_{c(t)}^1$  est donné par un  $k$ -simplexe de difféomorphismes extérieurs  $h(t): M_{c(t)}^1 \rightarrow M_{c(0)}^1$ . Un  $k$ -simplexe de plongements "extérieurs"  $\varphi(t): B(\rho) \rightarrow M_{c(t)}^1$  est tel que les  $h(t) \varphi(t)$  constituent un  $k$ -simplexe singulier de l'espace topologique  $\text{Plgt}(B(\rho), M_{c(0)}^1)$ . En revanche, la propriété "standard" se vérifie séparément pour chaque  $t$  vis-à-vis de la parallélisation dont est munie  $M_{c(t)}^1$ ; noter que  $h(t)$  ne respecte pas les parallélisations. Pour les plongements "extérieurs", on a le lemme d'extension des isotopies au sens "extérieur". Ainsi le  $k$ -simplexe de configurations de  $M_{c(t)}^2$  est donné comme en 2.5 en insérant partout où il le faut le qualificatif "extérieur". De proche en proche, nous avons la définition d'un petit  $k$ -simplexe  $c(t)$  et un relèvement de difféomorphismes extérieurs  $H(t): M_{c(t)} \rightarrow M_{c(0)}$ .

Un petit  $k$ -simplexe de  $\text{Diffext}$  est une famille de difféomorphismes  $f_{c(t)}: M_* \rightarrow M_{c(t)}$  telle que les  $H(t) f_{c(t)}$  constituent un  $k$ -simplexe singulier de l'espace topologique  $\text{Diff}(M_*, M_{c(0)})$ . Les relations d'équivalence 2.6 induisent des relations d'équivalence sur  $\text{Diffext}$ . Rappelons que tout difféomorphisme est prescrit sur le bord.

Par définition, un  $k$ -simplexe admet une subdivision en petits  $k$ -simplexes. Le groupe  $\text{Diff}_c(M_*)$  agit sur  $\text{Diffext}$  avec  $C$  pour espace d'orbites et son complexe singulier possède la propriété de Kan [8]; à partir de là, comme on a le relèvement des petits simplexes, la fibration  $\text{Diffext} \rightarrow C$  est claire (proposition 1.2).

*Remarque.* Si  $c_1$  et  $c_2$  sont deux configurations, rendues égales lorsque les facteurs fermés difféomorphes sont indiscernés, alors  $M_{c_1}$  est canoniquement difféomorphe à  $M_{c_2}$ . Ceci conduit à une identification de  $\text{Diff}(M_*, M_{c_1})$  et de  $\text{Diff}(M_*, M_{c_2})$ . Donc la relation d'indiscernabilité, imposée sur  $C$ , se répercute au niveau de  $\text{Diffext}$ . En réalité, selon le résultat du §3, la contribution des facteurs au calcul de  $\text{Diffext}$  les fait apparaître comme discernables. Par conséquent, passer de  $C$  à un espace de configurations où les facteurs sont discernables fait changer  $\text{Diffext}$  en l'union disjointe d'un nombre fini de copies de ce même espace.

2.8. *Configuration réduite*

Une articulation sera dite *libre* si elle contient un et un seul attachement isométrique ou si elle contient seulement un attachement (après celui-là, aucun autre centre d'attachement n'arrive dans la partie visible de l'articulation). Une configuration est dite *réduite* si aucune articulation n'est libre. Il ne semble pas qu'en général l'espace des configurations réduites ait le même type d'homotopie. Nous envisageons ci-dessous le cas particulier où il n'y a qu'un facteur et pas d'anse: les configurations décrivent seulement des sommes connexes avec des articulations. Dans ce cas, il n'y a qu'une configuration réduite.

PROPOSITION. *L'espace des configurations modelé sur un seul facteur est contractible.*

Démonstration. On associe à chaque configuration le nombre minimal d'articulations présentes. Par ce nombre on a une filtration  $C_n$  de  $C$ . On va prouver que  $C_{n-1}$  est un rétracte par déformation de  $C_n$ .

Chaque configuration  $c \in C_n, n \geq 1$ , possède au moins une articulation libre  $S$  attachée par un bras privilégié  $L(S)$ . Noter que, bien que libre, il est peut-être impossible de placer  $S$  au dernier étage de la tour de sommes connexes réalisant  $c$ . Le chemin issu de  $c$  qui consiste à déformer l'attachement de  $L(S)$  sur  $S$  jusqu'à le rendre isométrique, puis à rétracter le bras sur sa base opposée jusqu'à le rendre dégénéré, puis à faire tendre le rayon vers 0, est un petit 1-simplexe, dit *descendant*, qui aboutit dans  $C_{n-1}$  (fig. 4). Il dépend principalement du choix de  $S$ .

D'après 2.1, l'espace des chemins descendant de  $c$  associés à  $S$  est acyclique. Deux chemins descendant associés à deux articulations libres distinctes  $S$  et  $S'$  produisent canoniquement, même si  $L(S) = L(S')$ , un petit 2-simplexe dont l'arête opposée à  $c$  est dans  $C_{n-1}$ . Enfin, si  $c$  est représenté avec  $n$  articulations dont une  $S'$  est invisible dans  $L(S)$ , c'est que  $c \in C_{n-1}$ ; on a deux simplexes descendant issus de  $c$  selon que  $c$  est représenté avec ou sans  $S'$ . L'un est alors un morceau de l'autre; comme ils sont inclus dans  $C_{n-1}$ , ils sont canoniquement homotopes parmi les chemins issus de  $c$ , à extrémités dans  $C_{n-1}$ . Un tel argument vaut si, dans un représentant de  $c$ , une articulation est collée sur  $S$  par un bras dégénéré attaché isométriquement. Ces arguments prouvent la nullité de  $\pi_*(C_n, C_{n-1})$  en raisonnant sur chaque petit simplexe d'un simplexe relatif de la paire  $(C_n, C_{n-1})$ . En effet, un tel petit simplexe  $\Sigma$  possède une subdivision telle que, pour chaque simplexe  $\sigma$  de la subdivision, il existe une articulation qui est libre pour tout  $t \in \sigma$ . Pour le voir, on observe que, si  $\Sigma$  est représenté avec  $q$  articulations pour chaque  $t \in \Sigma$ , au moins l'une d'elles est libre (c'est là qu'intervient l'hypothèse sur le modèle) et que, si  $S$  est libre dans  $c(t_0)$ , elle est libre dans  $c(t)$  pour  $t$  voisin de  $t_0$ .  $\square$

§3. CALCUL DES DIFFEOMORPHISMES EXTERIEURS

3.1. *Notations*

La configuration-base  $*$  que nous choisissons est fabriquée comme suit: dans  $P_0$ , on donne  $n+g$  boules standard isométriques,  $D'_1, \dots, D'_{n+g}$ ; pour  $i = 1, \dots, n$ ,  $D'_i$  est la boule

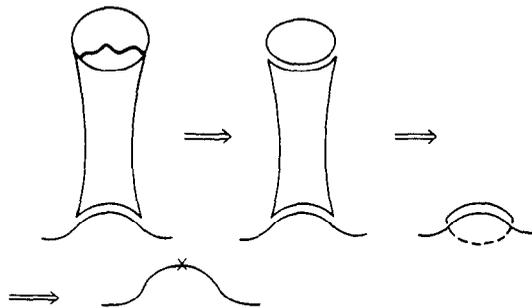


Fig. 4

d'attachement d'un bras  $\mathcal{L}_i$  réalisant la somme connexe avec  $P_i$ . L'attachement opposé est une boule standard  $D_i$  de  $P_i$  dont le centre  $x_i$  servira de point-base à  $P_i$ . On note  $\hat{P}_i = P_i - \text{int } D_i$ . Enfin, une anse  $\mathcal{L}_i$  est attachée dans l'intérieur de  $D_i$  pour  $i = n + 1, \dots, n + g$ . On note  $\Sigma$  la famille des 2-sphères de  $M_*$  formée des  $\partial D_i, i = 1, \dots, n$ , des  $\partial D_i'$  et d'une tranche dans chaque  $\mathcal{L}_i, i = n + 1, \dots, n + g$ . Il y a au total  $n + 2g$  sphères dans  $\Sigma$ , dont  $g$  sont non-séparantes. On note  $B$  l'adhérence du complémentaire dans  $P_0$  des boules d'attachement.

**3.2. Famille principale de bras**

Pour une configuration  $c$ , on choisit le représentant où tout centre d'attachement se trouve sur un facteur ou sur une articulation, éventuellement invisible. On lui associe alors un graphe  $G(c)$  ayant pour sommets l'ensemble des facteurs et articulations et pour arêtes l'ensemble des bras. Une famille de bras est dite *pré-principale* si en coupant les arêtes correspondantes de  $G(c)$ , on tue tous les cycles et si chaque composante contient exactement un sommet-facteur.

Le passage par le graphe est là pour ne pas tenir compte du caractère visible ou non des bras dans  $M_c$ .

LEMME. *Il existe une famille pré-principale de bras dont aucun n'est dégénéré (2.4). Une telle famille sera dite principale.*

*Preuve.* Dans un bras dégénéré, l'un des deux rayons est  $\geq \pi/2$ . Donc, dans une chaîne d'arêtes de  $G(c)$ , associées à des bras dégénérés, l'une des extrémités est un sommet-articulation. □

3.3. Un difféomorphisme extérieur  $f_c: M_* \rightarrow M_c$  est dit *adapté* s'il existe une famille principale de bras  $L_j$  et dans chacun une tranche  $N_j (= S^2 \times \{\rho\})$  disjointe de  $f_c(\Sigma)$  et entièrement visible dans  $M_c$ . On renvoie à (1.3) pour la définition de Diffstand. Nous utilisons de façon essentielle la conjecture de Smale dans:

PROPOSITION 1.3. *L'ensemble quasi-simplicial Diffextad des difféomorphismes extérieurs adaptés a le type d'homotopie faible de  $\prod_{i=1}^n \text{Diffstand}(P_i) \times (\Omega(0(3)))^g$ .*

*Démonstration.* La réunion  $N(c)$  des tranches choisies pour satisfaire la condition "adaptée" ne peut pas en général varier continûment avec  $c$  sur tout l'espace des paramètres mais seulement au voisinage de chaque configuration. On recouvre donc l'espace des paramètres avec un nombre fini de boules  $B^k$  et, pour  $c \in B^k$ , on a une famille  $N^k(c)$  de tranches dans des bras principaux, variant continûment avec  $c$ . Quitte à insérer des articulations invisibles de part et d'autre de chaque  $N_j^k(c)$ , on peut supposer le bras correspondant  $L_j^k(c)$  entièrement visible.

Fixons  $k$  tel que  $c \in B^k$ . Observons que  $f_c(\partial D_i), i = n + 1, \dots, n + g$ , borde une région qui contient exactement une tranche non séparante de la famille  $N^k(c)$ . Donc un chemin de  $M_c$  avec origine dans  $f_c(\Sigma)$  et extrémité dans  $\partial M_c$  et qui ne recoupe pas  $f_c(\Sigma)$ , ne peut couper une tranche non séparante de  $N^k(c)$ . Après cette remarque, on voit facilement que  $f_c(\hat{P}_1)$  détermine une unique tranche  $N_1^k(c)$  ayant l'une des propriétés exclusives suivantes:

- (a)  $N_1^k(c) \subset f_c(\hat{P}_1)$ .
- (b)  $f_c(\hat{P}_1) \cap N^k(c) = \emptyset$  et  $N_1^k(c)$  est la première tranche rencontrée par un chemin  $\alpha$  joignant  $f_c(\partial \hat{P}_1)$  à  $\partial M_c$  sans recouper  $f_c(\Sigma)$  et ayant une intersection minimale avec  $N^k(c)$ .

Maintenant, on coupe  $M(c)$  le long de  $N_1^k(c)$  et on décolle les bras  $L_j^k(c), j \neq 1$ ; on applique la réduction 2.8 aux morceaux dont l'union contient deux copies de  $N_1^k(c)$ . Dans l'un des deux on voit un anneau  $A_1 \cong S^2 \times [0, 1]$ , non pas entre  $N_1^k(c)$  et  $f_c(\partial \hat{P}_1)$ , mais entre leurs images par l'isotopie extérieure de réduction. On fabrique la configuration  $c'$  en recollant les bras principaux et en faisant glisser leurs centres d'attachement qui tombent dans  $A_1$ , hors de  $A_1$  en direction du coeur. Noter que dans le cas (a) de tels glissements ne se présentent pas. Procédant ainsi pour tous les facteurs, on arrive à une configuration, encore notée  $c'$ , sans articulation et où tous les bras sont attachés au coeur.

Si  $c \in B^k \cap B^k$ , la procédure analogue, où les deux familles principales sont décollées,

aboutit à  $c'$  possédant encore des articulations:  $N_{j_1}^k(c')$  et  $N_{j_2}^k(c')$  appartiennent à deux bras reliés par une articulation où rien d'autre n'est attaché. On pousse alors la déformation de  $c$  jusqu'à rendre cette articulation invisible dans  $c'$ .

Comme par 2.8 la réduction est "canonique" et que les glissements le sont aussi par la conjecture de Smale, il n'y a pas d'obstruction à déformer le simplexe  $f_{c(t)}$  jusqu'à  $f_{c'(t)}$ , où  $c'(t)$  est sans articulation et où chaque bras est attaché au coeur. De nouveau, d'après Smale, on peut supposer que  $f_{c'(t)}$  envoie une tranche donnée dans chaque bras  $\mathcal{L}_i$  de  $M_*$  sur une tranche d'un bras de  $M_{c'(t)}$ .

Précisément,  $f_{c'(t)}(\partial \hat{P}_1)$  est contenu dans un bras reliant  $P_0$  à  $P_{k_1}$ ; on peut supposer que  $c'$  est la tranche extrême de ce bras du côté de  $P_{k_1}$ . Donc  $f_{c'(t)}(\hat{P}_1) = \hat{P}_{k_1}(c'(t))$  où  $\hat{P}_{k_1}(c'(t))$  est l'adhérence du complémentaire de la boule standard d'attachement dans  $P_{k_1}$ . On a nécessairement  $P_{k_1} = P_1$ . Donc par la relation d'équivalence 2.6, on peut aussi dire  $f_{c'(t)}(\hat{P}_k) = \hat{P}_k(c'(t))$  pour tout  $k$ .

D'autre part comme  $f_{c'(t)}(B)$  évite une tranche dans chaque bras, après une déformation canonique,  $f_{c'(t)}(B)$  est l'adhérence du complémentaire dans  $P_0$  des boules d'attachement. La conjecture de Smale équivaut à l'acyclicité de  $Plgt(B, S^3_+ \text{ mod } S^2)$ . Par la fibration mentionnée en 2.1, on peut déformer  $f_{c'(t)}$  jusqu'à ce que  $f_{c'(t)}|B = \text{Id}$ . Poursuivant le redressement de  $f_{c'(t)}$  dans les anses, on obtient que chaque tranche est envoyée en elle-même par une rotation. La restriction de  $f_{c'(t)}$  à une anse produit donc un lacet de  $O(3)$ .

Enfin, on peut supposer que les bras de connexion avec les facteurs ont des rayons constants et que  $f_{c'(t)}|Y$  est l'identité. Il reste à montrer que  $f_{c'(t)}|\hat{P}_k$  se prolonge canoniquement en un difféomorphisme standard de  $P_k$ . Si  $\varphi(t): B(\rho) \rightarrow P_k$  (resp.  $\varphi: B(\rho) \rightarrow P_k$ ) est l'attachement du bras dans  $c'(t)$  (resp.  $*$ ),  $\varphi(t)\varphi^{-1}$  donne le prolongement cherché de  $f_{c'(t)}$ .

Réciproquement, la donnée de  $n$  difféomorphismes standard des facteurs et de  $g$  lacets de  $O(3)$  permet de construire une configuration et un difféomorphisme extérieur adapté.  $\square$

**THEOREME 1.** *L'inclusion de Diffextad dans Diffext induit une équivalence d'homotopie faible.*

La démonstration procède en deux étapes. Etant donné un  $k$ -simplexe  $\{f_{c(t)}\}$  de Diffext, dans la première étape on le déforme jusqu'à lui donner une *bonne présentation*. Dans la seconde étape, on applique un procédé de disjonction du type donné par Hatcher [4] pour rentrer dans Diffextad.

**3.4. Bonne présentation**

Si  $\varphi: B(\rho) \rightarrow M$  est un plongement standard dans une variété parallélisée, il existe une isotopie de  $\varphi$  à centre fixe jusqu'à ce que le diamètre de  $\varphi$ , = diamètre de l'image mesuré dans la métrique associée à la parallélisation, soit inférieur à un  $\delta$  donné à l'avance. Noter que ce procédé ne change pas les rayons du bras attaché par  $\varphi$ . Si  $\sigma = \{M_{c(t)}\}$  est un petit simplexe de configurations, en montant dans la tour des sommes connexes, on contracte tous les diamètres d'attachement autres que les attachements isométriques sur une articulation; ceux-ci restent inchangés. Pour toute face  $\sigma'$  de  $\sigma$ , la déformation  $\{M_{c(t,u)}; u \in [0, 1]\}$  est un petit simplexe pour n'importe quel ordre de sommes connexes faisant de  $\sigma'$  un petit simplexe. Si les attachements sont déjà petits sur  $\partial\sigma$ , la déformation peut être choisie constante sur  $\partial\sigma$ . Ces deux arguments prouvent que l'on peut déformer tout un  $k$ -simplexe jusqu'à ce que les attachements non isométriques soient petits et ceci sans changer les rayons des bras.

Soit maintenant  $h(t) = \sup \inf$  longueur, où le sup est pris sur l'ensemble des familles principales de bras de  $c(t)$  et où le inf est pris sur l'ensemble des bras d'une telle famille. La fonction  $h(t)$  est semi-continue inférieurement et possède donc une borne inférieure  $h_0$ . Soit  $n$  un majorant du nombre de bras pour tous les  $c(t)$ . On prend  $\delta = h_0/2n$ ; après la contraction décrite ci-dessus,  $c(t)$  possède une famille principale de bras possédant chacun une tranche entièrement visible dans  $M_{c(t)}$ . Par un argument de transversalité élémentaire, on obtient ce qu'on appelle la *bonne présentation* d'un  $k$ -simplexe  $\{f_{c(t)}\}$  de Diffext.

( $R_1$ ) Il existe un recouvrement de  $D^k$  par un nombre fini d'ouverts  $U_j, j \in J$ , et pour chaque  $j \in J, t \in \bar{U}_j$ , une famille principale de bras  $L_i(t), i \in I_j(t)$ , chaque bras étant muni d'une tranche

$N_{ji}(t)$  entièrement visible dans  $M_{c(t)}$ , transversale sur  $f_{c(t)}(\Sigma)$ , et variant continûment avec  $t \in \bar{U}_j$ , au sens extérieur ( $\Sigma$  a été défini en 3.1).

(R<sub>2</sub>) Pour  $k \neq j$ ,  $N_{ki}(t) \neq N_{ji}(t)$ .

3.5. **Disjonction sans paramètre** (cas sans anse)

Pour chaque  $t \in \bar{U}_j$ , l'intersection de  $N_{ji}(t)$  et de  $f_{c(t)}(\Sigma)$  est une union de courbes lisses deux à deux disjointes dans  $f_{c(t)}(\Sigma)$ . L'ensemble de ces courbes est noté  $\Gamma_{ji}(t)$  et  $\Gamma_j(t) = \bigcup_i \Gamma_{ji}(t)$ . On pose  $\Gamma(t) = \bigcup_j \Gamma_j(t)$  la réunion étant prise sur les  $j$  tels que  $t \in \bar{U}_j$ . Enfin  $\Gamma = \bigcup_t \Gamma(t)$ . On voudrait vider  $\Gamma$ . La différence avec la technique de Hatcher réside dans la possibilité de déformer la famille  $c(t)$  sous-jacente.

Pour ordonner (partiellement) cette famille de courbes, il convient de pointer chaque composante  $\Sigma_i$  de  $\Sigma$  par un point-base  $p_i$ . On met l'hypothèse de généricité:  $\forall i, f_{c(t)}(p_i) \notin N_{ji}(t)$ .

De cette manière, chaque courbe  $\gamma(t)$  borde un unique disque  $D_\Sigma(\gamma(t))$  sur  $f_{c(t)}(\Sigma)$  évitant l'image des points-bases. L'inclusion des disques définit un ordre partiel sur  $\Gamma$ , que nous appellerons l'ordre géométrique.

Etudions la géométrie lorsque  $\gamma(t) \subset N_{ji}(t)$  est minimale dans  $\Gamma_j(t)$ ; cet indice  $j$  va jouer un rôle particulier parmi tous les  $k$  tels que  $t \in \bar{U}_k$ . Coupons  $M_{c(t)}$  par toutes les tranches  $N_{ji}(t)$ ,  $l \in I_j(t)$ , et bouchons les trous par des boules, sauf ceux provenant de  $N_{ji}(t)$ . On obtient une variété dont une composante  $Q$  contient  $D_\Sigma(\gamma(t))$ . Comme les bras d'une famille principale ont été coupés,  $Q$  est homéomorphe à un facteur troué. Il existe sur  $\partial Q$ , donc sur  $N_{ji}(t)$ , un unique disque  $D_N(\gamma(t))$  tel que  $D_\Sigma(\gamma(t)) \cap D_N(\gamma(t))$  soit une 2-sphère anguleuse bordant une boule  $B(\gamma(t)) \subset Q$ .

On représente  $c(t)$  en insérant deux articulations invisibles de part et d'autre de chaque  $N_{ki}(t)$  pour tous les  $k$  tels que  $t \in \bar{U}_k$ . Elles sont reliées par un bras  $L_{ki}(t)$  contenant  $N_{ki}(t)$  et sur lequel ne vient aucun attachement. Les  $L_{ki}(t)$ ,  $k$  fixé, forment une famille principale. Donc  $M_{c(t)}$  est obtenu à partir d'une variété  $\tilde{M}_{c(t)}$  en faisant les sommes connexes indiquées par les bras  $L_{ki}(t)$ ,  $kl \neq ji$ . De plus,  $\tilde{M}_{c(t)}$  contient  $D_\Sigma(\gamma(t)) \cup D_N(\gamma(t))$  et cette sphère anguleuse y borde une boule  $\hat{B}(\gamma(t))$  du même côté que  $B(\gamma(t))$ . Noter qu'il se peut que  $D_\Sigma(\gamma(t)) \cup (N_{ji}(t) - D_N(\gamma(t)))$  borde aussi une boule dans  $\tilde{M}_{c(t)}$  mais nous ne nous y intéressons pas.

On choisit un paramétrage de  $\hat{B}(\gamma(t))$  par  $\mathbb{B} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0\}$ . Cela donne une procédure pour chasser les centres d'attachement qui s'y trouvent. Cette opération se relève en un glissement des dits attachements hors de  $\hat{B}(\gamma(t))$ . Soit  $c'(t)$  la configuration résultante. La boule  $\hat{B}(\gamma(t))$  existe dans  $M_{c'(t)}$ ; une isotopie de  $f_{c'(t)}(\Sigma)$  donnée par un modèle permet l'élimination de  $\gamma(t)$  ainsi que de toutes les courbes intérieures à  $D_N(\gamma(t))$ .

Les glissements de bras  $L_{ki}(t)$  par dessus  $N_{ji}(t)$  conservent la propriété que les  $L_{ki}(t)$  et les  $L_{ji}(t)$  forment deux familles principales. C'est évident pour  $k \neq j$  et, pour  $k = j$ , on observe que  $N_{ji}(t)$  isole encore le facteur  $Q$  dans  $M_{c'(t)}$ . En d'autres mots,  $N_{ji}(t)$  constitue à elle seule une famille principale dans la variété où les bras  $L_{ji'}(t)$ ,  $i' \neq i$ , sont décollés, et les glissements considérés préservent cette propriété. On peut donc itérer le procédé et vider  $\Gamma(t)$  pour arriver à un difféomorphisme adapté.

L'ensemble de la procédure dépend du choix d'un ordre total sur  $\Gamma(t)$  compatible avec l'ordre géométrique. Cet ordre étant choisi, certaines intersections apparaissent comme négligeables:  $\gamma'$  est négligeable s'il existe  $\gamma < \gamma'$  tel que  $D_N(\gamma)$  contient  $\gamma'$ . Noter aussi qu'une courbe non négligeable reste fixe jusqu'à l'étape de son élimination.

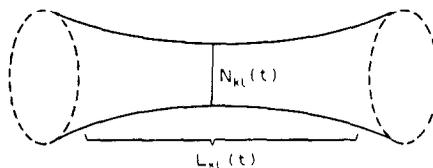


Fig. 5.

3.6. *Disjonction sans paramètre en présence d'anse*

Si  $N_{ji}(t)$  est une tranche non séparante, la composante  $Q$  décrite en 3.5 est homéomorphe à un facteur à un ou deux trous. La variété  $B(\gamma(t))$  est alors une boule ou un anneau; cette propriété définit  $D_N(\gamma(t))$  de façon unique. Si c'est une boule, on procède comme précédemment.

Etudions maintenant le cas où  $B(\gamma(t))$  est un anneau. La variété  $\hat{M}_{c(t)}$  est fabriquée en décollant tous les bras des familles principales  $L_{kl}(t)$ , pour tout  $k$  tel que  $t \in U_k$ , à l'exception de ceux dont les tranches sont des sphères parallèles au bord de  $B(\gamma(t))$ . Noter que si  $L_{kl}(t)$  a cette propriété, avec  $kl \neq ji$ , tout le bras est visible dans  $B(\gamma(t))$ . Plus précisément, si on décolle les bras  $L_{kl}(t)$  et  $L_{ji}(t)$ , l'anneau qu'ils limitent dans  $B(\gamma(t))$  se trouve naturellement sur une configuration de la sphère standard. D'après 2.8, cet espace de configurations est contractile, donc admet une section dans  $\text{Diffext}(S^3)$ . Par conséquent, cet anneau peut être paramétré de façon unique à un choix contractile près; on parlera de son paramétrage canonique.

A  $B(\gamma(t))$  correspond un anneau  $\hat{B}(\gamma(t))$  dont l'intérieur est plongé dans  $\hat{M}_{c(t)}$ . On choisit un plongement  $\psi: S^2 \times [-1, +1] \rightarrow \hat{M}_{c(t)}$  vérifiant:

- (1)  $\psi(S^2 \times \{0\}) = N_{ji}(t)$ ,
- (2)  $\psi(S^2 \times [0, 1]) \subset \hat{B}(\gamma(t))$ ,
- (3)  $\psi(S^2 \times \{1\})$  est proche de  $D_N \cup D_\Sigma$ ,
- (4) Si  $N_{kl}(t)$  est visible dans  $\hat{B}(\gamma(t))$ ,  $\psi$  induit le paramétrage canonique de l'anneau entre  $N_{kl}(t)$  et  $N_{ji}(t)$ ;
- (5) Pour  $h \in [-1, 0]$   $\psi(S^2 \times \{h\})$  est une tranche de  $L_{ji}(t)$ . On choisit  $\varepsilon$  assez petit pour que, pour  $h \in [1 - \varepsilon, 1]$ ,  $\psi(S^2 \times \{h\})$  soit transverse à  $f_{c(t)}(\Sigma)$ . On considère une isotopie de cet anneau qui pousse  $S^2 \times [1 - \varepsilon, 1]$  sur  $S^2 \times [0, 1]$  par déplacement le long des génératrices préservant le feuilletage  $S^2 \times \{h\}$ . On fait opérer cette isotopie sur les tranches  $N_{kl}(t)$ ,  $kl \neq ji$ , sur les attachements qui viennent sur  $\hat{B}(\gamma(t))$  et sur  $f_{c(t)}(\Sigma)$ . A la fin, malgré le déplacement de

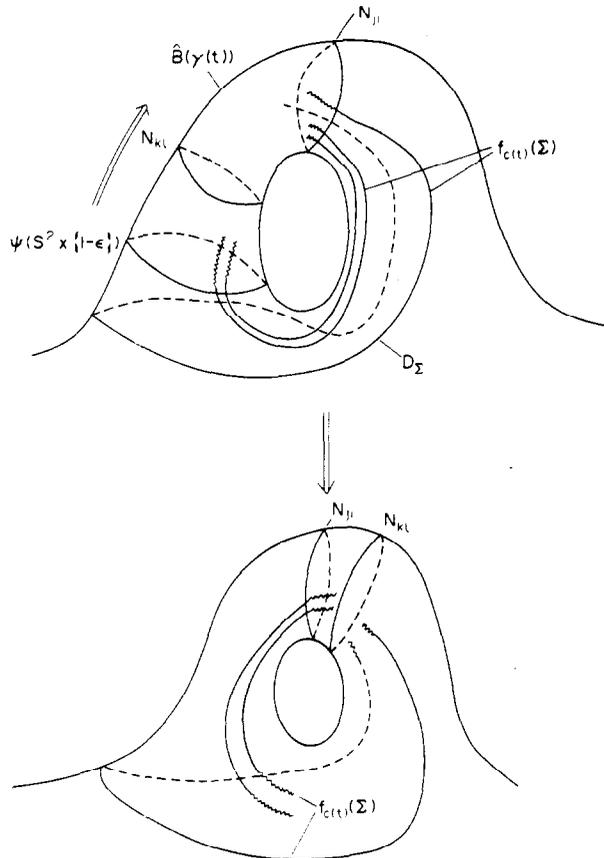


Fig. 6.

certaines tranches, qui d'après 4) se retrouvent comme tranches de  $L_{ji}(t)$ , les familles de bras n'ont pas perdu leur caractère principal;  $\Gamma_k(t)$  est préservé. La courbe d'intersection  $\gamma(t)$  a été éliminée, ainsi que toutes les intersections de  $f_{c(t)}(\Sigma)$  avec  $N_{ji}(t) - D_N(\gamma(t))$  qui sont donc négligeables. Les autres éléments de  $\Gamma_j(t)$  sont préservés.

Nous venons d'exécuter une opération dite spéciale aux anses.

### 3.7. Théorie locale à paramètres (sans opération spéciale aux anses)

Pour fixer les idées, disons que  $t \in \bar{U}_j \cap \bar{U}_k$  et que  $\gamma(t) \subset N_{ji}(t)$  est minimale. Les opérations de glissement et de disjonction sont prescrites par la boule  $\hat{B}(t) = \hat{B}(\gamma(t))$ , pour laquelle sont donnés un épaississement  $E(\hat{B}(t))$  et un paramétrage  $\psi_t: E(\mathbb{B}) \rightarrow E(\hat{B}(t))$  par l'épaississement du modèle, tel que  $\psi_t^{-1}(N_{ji}(t)) = \{z = 0\}$ . Soit  $X_t$  l'ensemble des centres d'attachement des  $j$  et  $k$ -bras venant sur  $\hat{B}(t)$ .

*Définition.* Un simplexe de configurations de  $E(\hat{B}(t))$  est obtenu en faisant les mouvements usuels de l'espace des configurations à condition qu'ils n'affectent pas le bord. Par exemple, on peut réduire les articulations libres existant à l'intérieur.

**PROPOSITION.** Soit  $\sigma$  un simplexe dans  $\bar{U}_j \cap \bar{U}_k$ . Pour  $t \in \partial\sigma$  et  $u \in [0, 1]$ , on donne une configuration  $E(\hat{B})(t, u)$  de  $E(\hat{B}(t))$ , une configuration partiellement réduite  $E(\hat{B})_r(t, u)$  avec un difféomorphisme  $\rho: E(\hat{B})(t, u) \rightarrow E(\hat{B})_r(t, u)$ , égal à l'identité au bord, et  $X_{t,u} \subset E(\hat{B})(t, u)$ . On suppose:

- $X_{t,0} = X_t$ ,
- $E(\hat{B})_r(t, 0) = E(\hat{B})(t, 0) = E(\hat{B}(t))$  et  $E(\hat{B})_r(t, 1) = E(\hat{B})(t, 1)$ ;
- $N_{ji}(t)$  est visible dans  $E(\hat{B})_r(t, u)$  pour tout  $u$ , ce qui permet d'écrire  $E(\hat{B})(t, 1) = E(\hat{B}(t, 1))$ , c'est-à-dire que  $E(\hat{B})(t, 1)$  est l'épaississement de  $\hat{B}(t, 1)$ ;
- $X_{t,1} \cap \hat{B}(t, 1) = \emptyset$ .

Alors, une telle donnée se prolonge à tout  $t \in \sigma$ , avec les mêmes propriétés.

En d'autres termes, plus vagues, toute famille de glissements de  $X_t$  hors de  $\hat{B}(t)$  pour  $t \in \partial\sigma$  se prolonge à  $\sigma$ .

*Preuve.* Soit  $\Sigma = \sigma \times \{0\} \cup \partial\sigma \times [0, 1]$ ; un point de  $\Sigma \times [0, 2]$  aura des coordonnées  $(\theta, v)$ . Etant donné le paramétrage  $\psi_t$  choisi pour  $t \in \sigma$ , il n'y a pas d'obstruction à paramétrer  $E(\hat{B})(\theta)$  par  $\psi_\theta$  de sorte que  $(\rho\psi_\theta)^{-1}(N_{ji}) = \{z = 0\}$ . A l'aide de ce paramétrage, on construit  $X_{\theta,v} \subset E(\hat{B})(\theta)$  de sorte que  $X_{\theta,0} = X_\theta$  et que  $\psi_\theta^{-1}(X_{\theta,1}) \subset \{z < 0\}$ ; pour  $v \in [0, 1]$ ,  $E(\hat{B})(\theta, v) = E(\hat{B})(\theta)$ . Puis, pour  $v$  variant de 1 à 2, on exécute la réduction de  $E(\hat{B})(\theta)$  à  $E(\hat{B})_r(\theta)$ ; cette déformation est constante sur  $\partial\Sigma$ . Ainsi  $N_{ji}$  est visible dans  $E(\hat{B})(\theta, v)$  pour  $(\theta, v) \in \partial\Sigma \times [0, 2] \cup \Sigma \times \{2\}$ , ce qui permet d'écrire  $E(\hat{B})(\theta, v) = E(\hat{B}(\theta, v))$ . De plus, pour les mêmes  $(\theta, v)$ , on a  $X_{\theta,v} \cap \hat{B}(\theta, v) = \emptyset$ . Pour finir on utilise un homéomorphisme de  $\Sigma \times [0, 2]$  sur  $\sigma \times [0, 1]$  envoyant  $\partial\Sigma \times [0, 2] \cup \Sigma \times \{2\}$  sur  $\sigma \times \{1\}$ . On a ainsi l'extension cherchée. La construction a consisté à superposer le glissement de  $X_t$  prescrit par  $\psi_t$  à celui donné pour  $t \in \partial\sigma$ .  $\square$

3.8. Soit  $B(t)$  la boule associée à  $\gamma(t)$  en ne décollant que les  $j$ -bras; la boule  $B(t)$  se réduit sur  $\hat{B}(t)$ . Soit  $Y_t$  l'ensemble des attachements des  $j$ -bras sur  $B(t)$ . Si  $E(\hat{B})(t, u)$ ,  $E(\hat{B})_r(t, u)$ ,  $X_{t,u}$  sont des données vérifiant les hypothèses de 3.7, celles-ci se relèvent en une déformation  $E(B)(t, u)$ ,  $E(B)_r(t, u)$ ,  $Y_{t,u}$ , vérifiant les mêmes conditions. On construit  $E(B)(t, u)$  à partir de  $E(\hat{B})(t, u)$  en recollant les  $k$ -bras dont les centres d'attachements sont dans  $X_{t,u}$ . Pour  $u$  petit,  $E(B)_r(t, u)$  décrit une réduction de  $E(B)(t, 0)$  jusqu'à  $E(\hat{B})(t, 0)$ ; ensuite  $E(B)_r(t, u) = E(\hat{B})_r(t, u)$ ; enfin pour  $u$  descendant de 1,  $E(B)_r(t, u)$  décrit une réduction de  $E(B)(t, 1)$  jusqu'à  $E(\hat{B})(t, 1)$ .

3.9. **PROPOSITION.** On suppose que, pour  $t \in \sigma$ ,  $D_N(\gamma(t)) \cup D_Z(\gamma(t))$  borde une boule  $B(\gamma(t)) = B(t)$ . Toute isotopie d'élimination de  $\gamma(t)$ , à support dans  $E(B(t))$ , donnée pour  $t \in \partial\sigma$ , se prolonge à tout  $t \in \sigma$ .

*Preuve.* Utiliser le même argument de superposition qu'en 3.7.  $\square$

3.10. *Théorie locale à paramètres relative à l'opération spéciale aux anses*

Pour plus de clarté dans l'étude précédente, nous avons séparé l'opération de glissement et celle de disjonction; en fait on peut utiliser le paramétrage pour exécuter les deux opérations simultanément. Dans l'opération spéciale aux anses, on est obligé de faire l'isotopie qui déplace la tranche visible  $N_k$  en même temps que l'on fait les glissements, sinon  $\Gamma_k$  ne serait pas préservé. Cette remarque étant faite, on peut faire fonctionner pour un anneau le même principe de superposition que pour une boule et obtenir un énoncé analogue à 3.7 + 3.9.

3.11. *Fonctions de Hatcher*

PROPOSITION. Il existe des données  $\{U_j\}, \{N_{ji}(t)\}, \Gamma$  satisfaisant  $(R_1)$  et  $(R_2)$  (voir 3.4) et une fonction  $\lambda: \Gamma \rightarrow ]0, 1[$ , dite fonction de Hatcher, vérifiant:

$(R_3)$   $t \rightarrow \lambda(\gamma(t))$  est lisse sur un voisinage de  $\bar{U}_j$  où  $\gamma(t)$  existe;

$(R_4)$   $\lambda$  est croissante pour l'ordre sur les courbes;

$(R_5)$  si  $\gamma_1(t) \neq \gamma_2(t), |\lambda(\gamma_2(t)) - \lambda(\gamma_1(t))| > \eta$ , pour un certain  $\eta > 0$ .

Preuve. Partant de données vérifiant  $(R_1)$  et  $(R_2)$ , il est très facile de construire  $\lambda$  vérifiant  $(R_3)$  et  $(R_4)$ . Par exemple, Igusa nous a proposé de prendre l'aire du disque  $D_2(\gamma(t))$  multipliée par un scalaire constant convenable pour que la valeur soit  $< 1$ .

Considérant la restriction de  $\lambda$  à  $\Gamma_j$ , on fabrique un graphe  $G_j \subset \bar{U}_j \times ]0, 1[$  qui est le graphe d'une fonction numérique multivoque: chaque nappe est associée à un type d'intersection  $\gamma \subset N_{ji}$ . Nous avons deux sortes de singularités: les points doubles de  $G_j$  et les points d'intersection de  $G_j$  avec  $G_p$ .

Pour atteindre  $(R_5)$  selon l'idée de Hatcher, on démultiplie les tranches  $N_j$  en  $k + 1$  tranches parallèles  $N_j^l, l = 1, \dots, k + 1$ , ( $k =$  dimension de l'espace des paramètres). De même,  $\Gamma_j$  est démultiplié en  $\Gamma_j^l$  et  $\lambda$  est construit sur  $\cup_{j,l} \Gamma_j^l$  pour satisfaire  $(R_3)$  et  $(R_4)$ ; les graphes sont notés  $G_j^l$ . Soit  $K_j^l = \{t \in D^k | t = \text{projection d'un point double de } G_j^l\}$ . Génériquement sur  $\lambda$ , les  $K_j^l$  sont de codimension 1 et leurs intersections sont en position générale:  $\bigcap_{l=1}^{k+1} K_j^l = \emptyset$ .

Notons  $U_j^l = U_j$ —vois. rég.  $(K_j^l)$ ; pour des voisinages réguliers assez petits, les  $U_j^l$  recouvrent  $U_j$ . Pour  $t \in \bar{U}_j^l$ , on sélectionne la tranche  $N_j^l(t)$ . Alors, les propriétés  $(R_1)$ – $(R_4)$  sont satisfaites. De plus, revenant aux notations initiales pour désigner la nouvelle situation, les graphes  $G_j$  sont sans point double. Il reste éventuellement des points d'intersection de  $G_j$  avec  $G_p$ .

De nouveau on démultiplie  $N_j$  en  $k + 1$  tranches  $N_j^l$ . Soit  $K_j'^l = \{t \in D^k | t = \text{projection d'un point d'intersection de } G_j^l \text{ avec } G_p^m, p \neq j\}$ . Génériquement sur  $\lambda$ , on a  $\bigcap_{l=1}^{k+1} K_j'^l = \emptyset$ . On procède mot pour mot comme ci-dessus et on gagne  $(R_5)$ . Cette étape ne peut se faire en même temps que la précédente car celle-ci a pour effet de créer des points d'intersection.  $\square$

3.12. *Passage à un recouvrement plus fin*

Considérons des données vérifiant 3.11 et un recouvrement plus fin  $\{\Omega_p\}$ . Si  $p \rightarrow j(p)$  est le morphisme de raffinement, on associe à chaque  $\Omega_p$  une tranche  $N_p$  légèrement translátée de  $N_{j(p)}$  pour satisfaire  $(R_2)$ . Ce choix étant fait, l'ordre géométrique dit dans quel sens il faut légèrement translater les valeurs de  $\lambda$  pour satisfaire  $(R_4)$  et  $(R_5)$ ; noter que le problème ne se pose qu'à l'intersection  $\Omega_p \cap \Omega_{p'}$  avec  $j(p) = j(p')$ .  $\square$

Remarque. Dans cet argument, le recouvrement des  $\Omega_p$  n'est pas nécessairement un recouvrement ouvert. Prenant pour  $D^k$  un modèle cubique, on peut donc supposer que  $\bar{U}_j$  est un petit cube d'un quadrillage. Par conséquent, si  $\bar{U}_j \cap \bar{U}_k \neq \emptyset$ , l'intersection est un simplexe de dimension strictement plus petite.

3.13. *Fin de la démonstration du théorème de disjonction*

L'ordre total utilisé sur  $\Gamma$  est celui donné par la fonction de Hatcher  $\lambda$ . La disjonction se construit sur  $D^k \times [0, 1]$  par récurrence sur les simplexes du quadrillage de  $D^k$  par dimension

croissante. Regardons les détails dans le cas unidimensionnel. Ici  $\bar{U}_j$  est un intervalle d'extrémités  $t_0, t_1$ , où  $\{t_0\} = \bar{U}_0 \cap \bar{U}_j$  et  $\{t_1\} = \bar{U}_1 \cap \bar{U}_j$ .

On construit  $f_{c(t, u)}$ ,  $i = 0, 1$ , selon le procédé décrit dans la disjonction sans paramètre; l'opération concernant une courbe  $\gamma(t_i)$  se fait dans le  $u$ -intervalle  $[\lambda(\gamma(t_i)), \lambda(\gamma(t_i)) + \eta]$ . Ceci étant, lorsque se pose le problème d'étendre  $f_{c(t, u)}$  à tout  $t \in \bar{U}_j$ , on peut supposer que les valeurs de  $\lambda$  sont constantes (par une transformation sur  $u$  dépendant de  $t$ ) car  $\lambda$  n'a pas de valeurs doubles; on construit alors  $f_{c(t, u)}$  par récurrence croissante sur les valeurs de  $\lambda$ .

Soit  $\gamma(t)$  une courbe d'intersection avec  $N_{j_i}(t)$ ; on note  $u_0 = \lambda(\gamma(t))$ . On suppose que  $f_{c(t, u)}$  est construit sur  $\{t_0\} \times [0, 1] \cup \{t_1\} \times [0, 1] \cup \bar{U}_j \times [0, u_0]$ . Par hypothèse de récurrence,  $\gamma(t)$  est minimale dans  $\Gamma(t, u_0)$  et les  $N_{j_i}(t, u_0)$  sont visibles dans  $M_{c(t, u_0)}$ . On a des supports d'élimination de  $\gamma(t)$ :  $B(t, u_0)$  qui habite dans la variété où sont décollés les  $j$ -bras de  $M_{c(t, u_0)}$ ;  $\hat{B}(t_0, u_0)$  (resp.  $\hat{B}(t_1, u_0)$ ) qui habite dans la variété où sont décollés les  $j$ - et 0-bras (resp. les  $j$ - et 1-bras).

Par construction de  $f_{c(t, u)}$ , on a des données  $E(\hat{B})(t_0, u)$ ,  $E(\hat{B})(t_1, u)$  qui vérifient les conditions de 3.7 (le  $u$ -intervalle de 3.7 est ici  $[u_0, u_0 + \eta]$ ). Par 3.8, on a des données  $E(B)(t_0, u)$  et  $E(B)(t_1, u)$  qui vérifient les mêmes conditions. Noter que dans  $E(B)(t_0, u)$ , la tranche  $N_{j_i}$  risque d'être masquée par des 0-bras; ce fait nous a obligé à considérer les familles associées "partiellement réduites". D'après 3.7, ces dernières données s'étendent à tout  $t \in \bar{U}_j$ . Simultanément on applique 3.9 pour prolonger la disjonction. S'il s'agit de déformation à travers des anneaux, on applique 3.10. Dans tous les cas, les  $N_{j_i}(t, u_0 + \eta)$  se retrouvent visibles, donc la récurrence sur les valeurs de  $\lambda$  peut être poursuivie.

§4. FIBRATION AU-DESSUS DU PRODUIT DES FACTEURS

4.1. Soient  $c$  une configuration et  $M_c$  sa réalisation. Le groupe fondamental  $\pi_1(M_c, \partial P_0)$  admet un quotient naturel libre à  $g$  générateurs. En effet, en remplaçant chaque facteur et articulation par un point et chaque bras par une arête ayant la longueur du bras, on construit une projection de  $M_c$  sur un graphe à  $g$  cycles. On note  $(\tilde{M}_c, \partial P_0)$  le revêtement galoisien associé. En décollant successivement les sommes connexes de  $M_c$ , on décolle simultanément celles de  $\tilde{M}_c$ . A la fin, on obtient  $\tilde{M}_c^0$  qui revêt  $M_c^0 =$  union des facteurs et des articulations. On note  $\pi$  la projection  $\tilde{M}_c \rightarrow M_c$  et, par extension,  $\tilde{M}_c^0 \rightarrow M_c^0$ . On définit le complexe quasi-simplicial  $\tilde{C}$  de la façon suivante:

— un 0-simplexe est donné par  $c \in C$  et par  $n$  composantes  $Q_1, \dots, Q_n$  de  $\tilde{M}_c^0$  avec  $Q_i \cong P_i$  et  $\pi(Q_j) \neq \pi(Q_i)$  pour  $i \neq j$ . Le difféomorphisme ci-dessus est assigné:  $\pi(Q_i)$  est un facteur  $P_j$  difféomorphe à  $P_i$  et ce difféomorphisme-là a été choisi une fois pour toutes dans 2.6.

— un petit  $k$ -simplexe  $\{\tilde{c}(t)\}$  est donné par  $\langle c(t), Q_1(t), \dots, Q_n(t) \rangle$  où  $\{c(t)\}$  est un petit  $k$ -simplexe de  $C$  et où les  $Q_i(t)$  sont indépendants de  $t$ , ce qui a un sens car il existe une identification canonique de  $\tilde{M}_{c(t)}^0$  avec  $\tilde{M}_{c(t')}^0$ .

La projection  $\Pi: \{\tilde{c}(t)\} \rightarrow \{c(t)\}$  munit  $\tilde{C}$  d'une structure de revêtement au-dessus de  $C$ . La connexité de  $\tilde{C}$  est déduite de celle de  $C$  à l'aide des glissements de Whitehead des facteurs au-dessus des anses.

4.2. L'application  $p: \tilde{C} \rightarrow \prod_1^n \text{int } P_i$

Nous allons la décrire sur les 0-simplexes de  $\tilde{C}$ ; elle s'étendra naturellement aux  $k$ -simplexes de  $\tilde{C}$  à valeurs dans le complexe singulier de  $\Pi \text{ int } P_i$ . Une configuration  $c$  étant donnée, on décide de la représenter en insérant des articulations invisibles aux extrémités des bras de sorte que tous les bras de longueur non nulle aient des extrémités attachées isométriquement. Ainsi tous les bras ont au moins une extrémité isométrique. On choisit l'ordre des sommes connexes avec priorité aux bras à deux extrémités isométriques (comme notamment les bras de longueur non nulle). Cette construction s'étend clairement aux petits simplexes de configurations (2.7).

Partant de  $M_c^0$ , tant que l'on n'attache que des bras à extrémités isométriques, les facteurs,

y compris le coeur, restent tels quels (rappelons qu'un attachement n'est considéré comme isométrique que sur une articulation). La suite des attachements à partir de  $M_c^0$  fournit une suite  $M_c^s$ ,  $s = 0, \dots, m$ , avec  $M_c^m = M_c$ ; simultanément, on a la suite des revêtements (éventuellement non connexes)  $\tilde{M}_c^s$ . Etant donné  $\tilde{c} = \langle c, Q_1, \dots, Q_n \rangle$ , on note  $(\tilde{M}_c^s)_i$  la composante de  $\tilde{M}_c^s$  qui contient  $Q_i$  parmi ses facteurs. Il existe un plus grand entier  $m_0$  tel que, pour tout  $i$ ,  $(\tilde{M}_c^{m_0})_i = Q_i$ . Pour  $s \geq m_0$ , on construit  $M_c^s$  à partir de  $M_c^{m_0}$  en attachant des bras de longueur nulle. Prenant le centre  $o$  de  $D_-$  comme point-base de  $\tilde{M}_c^m$ , nous allons, par valeur décroissante de  $s$ , décrire un point-base naturel dans  $(\tilde{M}_c^s)_i$  en nous fondant sur la construction ci-dessous.

*Construction.* Soit  $X = A \# L_0 \# B$  où  $L_0$  est un bras de longueur nulle avec un attachement de type mou  $\varphi: B(2\rho) \rightarrow A$ ,  $\rho \neq 0$ , et un attachement isométrique  $\psi: B^c(\rho) \rightarrow B$ . On a deux applications  $r_A: X \rightarrow A$  et  $r_B: X \rightarrow B$  données par les formules suivantes:

— si  $x \in B(2\rho)$ ,  $r_A(\varphi(x)) = \varphi(\alpha_\rho(x))$ , où  $\alpha_\rho: B(2\rho) \ni$  avec  $\alpha_\rho(B(\rho)) = e$  et  $\alpha_\rho = \text{Id}$  au bord de  $B(2\rho)$ . On prolonge  $r_A$  par l'identité sur  $A - \text{Im } \varphi$  et par l'application constante sur  $B$ , égale à  $\varphi(e)$ .

— Soit  $\beta_\rho: B^c(\rho) \rightarrow B^c(\rho)$ , égale à l'identité au bord et envoyant  $\partial B(2\rho)$  sur  $-e$ ; alors, pour  $x \in B(2\rho) - B(\rho)$ , on pose  $r_B(\varphi(x)) = \psi(\beta_\rho(x))$ . On prolonge  $r_B$  par l'application constante sur  $A - \text{Im } \varphi$ , égale à  $\psi(-e)$ , et par l'identité sur  $B - \text{im } \psi$ .

Les applications  $\alpha_\rho$  et  $\beta_\rho$  déplacent les points sur les méridiens de  $S^3$  et ne dépendent que de  $\rho$ .

*Remarque.* Si  $\rho = 0$ , on a  $X = A$  et  $r_A = \text{Id}$ ; en même temps,  $B$  est réduit à une articulation. On ne définit pas  $r_B$ . Noter que dans une famille de configurations de  $A \# L_0 \# B$ , dépendant d'un paramètre  $t$ , même si  $\rho(t)$  s'annule,  $r_A(t)$  est une famille d'applications lisses, continue en  $t$  dans la topologie  $C^0$ .

Revenons à la construction du point-base de  $(\tilde{M}_c^s)_i$ . On a une application  $r_i: (\tilde{M}_c^{s+1})_i \rightarrow (\tilde{M}_c^s)_i$  décrite comme il est dit ci-dessous. On met sur le but l'image du point-base de la source qui existe par hypothèse de récurrence.

Disons que  $M_c^{s+1}$  est obtenu en collant à  $M_c^s$  un bras  $L$ . Si  $(\tilde{M}_c^{s+1})_i = (\tilde{M}_c^s)_i$ , on pose  $r_i = \text{Id}$ ; cela arrive lorsque  $\pi^{-1}(L)$  ne rencontre pas  $(\tilde{M}_c^{s+1})_i$ . Sinon  $L$  est sûrement de longueur nulle.

Supposons d'abord que  $\pi^{-1}(L)$  ne contienne qu'un seul bras  $L_0$  touchant  $(\tilde{M}_c^s)_i$ ; dans ce cas  $(\tilde{M}_c^{s+1})_i = A \# L_0 \# B$  et selon que  $(\tilde{M}_c^s)_i = A$  ou  $B$ , on pose  $r_i = r_A$  ou  $r_B$ . Noter que, si  $(\tilde{M}_c^s)_i = B$ , comme ce n'est pas une articulation, le rayon  $\rho$  ne peut être nul.

Dans le cas général,  $(\tilde{M}_c^{s+1})_i$  est obtenu par une somme connexe simultanée entre  $(\tilde{M}_c^s)_i$  et des variétés deux à deux disjointes, à l'aide de bras dont les attachements sur  $(\tilde{M}_c^s)_i$  sont indépendants. On construit  $r_i$  comme ci-dessus relativement à chaque bras de cette somme connexe.

Après cette itération,  $Q_i$  est pointée. L'identification préassignée de  $Q_i$  avec  $P_i$  donne la  $i$ -ème coordonnée de  $p(\tilde{c})$ .

### 4.3. Bonne définition de $p$ .

D'abord on montre que, pour une configuration, la définition de  $p$  ne dépend pas du choix de l'ordre des attachements. Or, la permutation de deux attachements n'est autorisée que si les boules (de double rayon pour le type mou) sont disjointes. Disons que  $M_c^{s+2}$  est construit à partir de  $M_c^s$  par deux tels bras  $L$  et  $L'$ ; la construction précédente conduit à une application  $\bar{r}_i: (\tilde{M}_c^{s+2})_i \rightarrow (\tilde{M}_c^s)_i$ . On vérifie qu'elle est égale à la composée de deux applications  $r_i$  obtenue en décollant successivement  $L$  puis  $L'$ ; donc elle est indépendante de l'ordre des opérations bien que la variété intermédiaire  $(\tilde{M}_c^{s+1})_i$  puisse en dépendre.

Il en résulte que le passage du type mou au type isométrique (2.5) d'un attachement invarie la valeur de  $p$ : on peut supposer que la somme connexe associée à un tel bras de type variable se fait entre celles dont les bras ont deux attachements isométriques et les autres; ainsi, cette somme connexe relie des composantes ne contenant aucun facteur. Donc, ce bras n'intervient pas dans le pointage de  $Q_i$ .

4.4. L'application de  $(\prod_i \text{Diffstand } P_i) \times (\Omega 0(3))^g$  dans  $C$  induite par l'action de  $\prod_i \text{Diffstand } P_i$  sur la configuration-base, se relève clairement dans  $\tilde{C}$  et la composition  $(\prod_i \text{Diffstand } P_i) \times (\Omega 0(3))^g \rightarrow \tilde{C} \xrightarrow{p} \prod_{i=1}^n \text{int } P_i$  est le produit des applications valeur au point-base de  $P_i$ .

4.5. Négligeant dans un premier temps les difficultés liées à l'annulation d'un rayon d'attachement, nous allons prouver que l'application  $p: \tilde{C} \rightarrow \prod_{i=1}^n \text{int } P_i$  est une fibration de Kan. Les modifications nécessaires seront apportées en 4.6 et 4.7.

*Démonstration.* La surjectivité de  $p$  est hors de doute. On considèrera le relèvement des  $k$ -simplexes,  $k \geq 1$ . Soit  $\sigma: D^{k-1} \times [0, 1] \rightarrow \prod_{i=1}^n \text{int } P_i$ ; soit  $\Sigma: D^{k-1} \times \{0\} \rightarrow \tilde{C}$  un relèvement de  $\sigma$ ,  $\Sigma(t, 0) = \langle c(t, 0), Q_1, \dots, Q_n \rangle$ . Quitte à subdiviser  $D^{k-1}$ , on peut se limiter au cas où  $\{c(t, 0), t \in D^{k-1}\}$  est un petit simplexe pourvu que le prolongement  $c(t, u)$  vérifie:

*Condition 1.* Tout ordre d'attachements convenant pour  $c(t, 0)$  convient aussi pour  $c(t, u)$ .

Soit  $f(t, u) \in \prod \text{Diff } P_i$  tel que  $f(t, 0) = \text{Id}$  et  $f(t, u)\sigma(t, 0) = \sigma(t, u)$ , qui existe par extension des isotopies. Ayant choisi un ordre des attachements comme en 4.2, on va définir récursivement des familles de difféomorphismes et de configurations, pour  $s = 0, \dots, m$ :  $[f^s(t, u): M_{c(t, 0)}^s \rightarrow M_{c(t, u)}^s]$

$$k^s(t, u), K^s(t, u): M_{c(t, 0)}^s \hookrightarrow$$

avec  $f^s(t, 0) = k^s(t, 0) = K^s(t, 0) = \text{Id}$ .

On commence avec  $f^0(t, u)$  donné par la  $i$ -ème composante de  $f(t, u)$  sur  $P_i (i = 1, \dots, n)$  et par l'identité sur les autres composantes de  $M_{c(t, u)}^0 = M_{c(t, 0)}^0$ .

Soit  $\varphi^{s+1}(t, u)$  le couple des attachements du  $(s+1)$ -ième bras dans  $c(t, u)$ . On pose:  $\varphi^{s+1}(t, u) = f^s(t, u)k^s(t, u)\varphi^{s+1}(t, 0)$ . En prolongeant  $f^s(t, u)k^s(t, u)$  par l'identité sur le bras, on définit un difféomorphisme extérieur:

$$g^{s+1}(t, u): M_{c(t, 0)}^{s+1} \rightarrow M_{c(t, u)}^{s+1}.$$

On pose  $f^{s+1}(t, u) = g^{s+1}(t, u)K^{s+1}(t, u)$ . Les familles  $k^s(t, u)$  et  $K^{s+1}(t, u)$  sont là pour corriger le jeu des parallélisations. On impose les conditions suivantes.

*Condition 2.*  $f^s(t, u)k^s(t, u)\varphi^{s+1}(t, 0)$  est standard.

*Condition 3.*  $k^s(t, u)$  et  $K^{s+1}(t, u)$  sont l'identité sur la partie  $M_{c(t, 0)}^s$ , qui est visible dans  $M_{c(t, 0)}^{s+1}$ .

Ainsi, récursivement,  $f^s(t, u)$  respecte la parallélisation sur les parties visibles des articulations et des attachements, indépendants dans  $c(t, 0)$ , le restent dans  $c(t, u)$ ; la condition 1 est donc satisfaite.

Soit  $r_i^{s+1}(t, u): (\tilde{M}_{c(t, u)}^{s+1})_i \rightarrow (\tilde{M}_{c(t, u)}^s)_i$  l'application construite en 4.2. Par construction, on a:

$$r_i^{s+1}(t, u)\tilde{g}^{s+1}(t, u) = \tilde{f}^s(t, u)\tilde{k}^s(t, u)r_i^{s+1}(t, 0).$$

Or, on veut avoir la propriété:

$$r_i^{s+1}(t, u)\tilde{f}^{s+1}(t, u) = \tilde{f}^s(t, u)r_i^{s+1}(t, 0)$$

qui impliquera la formule cherchée:

$$p(\langle c(t, u), Q_1, \dots, Q_n \rangle) = \sigma(t, u).$$

Elle sera la conséquence de la:

*Condition 4.*  $\tilde{k}^s(t, u)r_i^{s+1}(t, 0)\tilde{K}^{s+1}(t, u) = r_i^{s+1}(t, 0)$ .

La condition 3 permet de ne construire  $K^{s+1}(t, u)$  que sur un objet lié au bras. Disons que la configuration  $c^{s+1}(t, 0)$  est donnée par des plongements:

$$\begin{aligned} \varphi(t) : B(2\rho_1) \perp\!\!\!\perp B^c(\pi - \rho_2) &\rightarrow M_{c(t, 0)}^s, \\ \psi(t) : B(2\rho_1) \#_{L(\rho(t), \pi - \rho(t))} B^c(\pi - \rho_2) &\rightarrow M_{c(t, 0)}^{s+1}. \end{aligned}$$

Nous noterons plus brièvement  $B(2\rho_1) \# B^c(\pi - \rho_2)$  la source de  $\psi(t)$ ;  $k(t, u)$  et  $K(t, u)$  sont les difféomorphismes induits sur les sources respectivement par  $k^s(t, u)$  et  $K^{s+1}(t, u)$ . Compte tenu de la construction de  $r_i^{s+1}$ , les conditions deviennent:

Condition 4'. Si  $\rho(t) \neq 0$  (rayon d'attachement du côté mou), alors

$$k(t, u)r_* K(t, u) = r_*, \text{ où } * = A, B.$$

Condition 3'.  $k(t, u)$  (resp.  $K(t, u)$ ) sont des difféomorphismes qui sont l'identité dans un voisinage du bord de  $B(2\rho_1) \perp\!\!\!\perp B^c(\pi - \rho_2)$  (resp. de  $B(2\rho_1) \# B^c(\pi - \rho_2)$ ).

Condition 2' ( $\Rightarrow$  condition 2). Soit  $x_1, x_2$  le centre de  $B(\rho_1), B^c(\pi - \rho_2)$ . Soit  $\tau(t, u)$  la parallélisation induite par  $f^s(t, u)\varphi(t)$  à partir de celle de  $M_{c(t, u)}^s$ . On demande:  $k(t, u)(x_i) = x_i, (k^*(t, u)\tau(t, u))(x_i)$  est la parallélisation canonique  $\xi(x_i)$  et  $k(t, u)$  est linéaire au voisinage de  $x_i$ . De plus, si  $\tau(t, u)(x_i) = \xi(x_i)$  pour tout  $u$ , on impose  $k(t, u) = \text{Id}$  sur toute la boule de centre  $x_i$ .

La famille  $k(t, u)$  est donnée par le théorème de fibration des difféomorphismes de la boule, fixant l'origine et un voisinage du bord, au-dessus de l'espace des 1-jets.

Avant de construire  $K(t, u)$ , on renforce les conditions intervenant dans la construction de  $r_A$  et  $r_B$  (voir 4.2). Au lieu de  $\alpha_\rho(B(\rho)) = e$ , on prend  $\alpha_\rho(B(5/3\rho)) = e$ , et au lieu de  $\beta_\rho(B^c(2\rho)) = -e$ , on prend  $\beta_\rho(B^c(4/3\rho)) = -e$ . On demande que  $\alpha_\rho$  donne un difféomorphisme  $B(2\rho) - B(5/3\rho) \rightarrow B(2\rho) - \{e\}$ .

Ainsi, la condition 4' via  $r_A$  détermine  $K(t, u)$  sans ambiguïté sur  $B(2\rho_1) - B(5/3\rho_1(t))$  avec une extension évidente à l'adhérence, vu que  $r_A$  respecte les rayons et que  $k(t, u)$  est linéaire au voisinage du centre. Par extension des isotopies, on prolonge  $K(t, u)$  à  $B(5/3\rho_1(t))$  de sorte que sa restriction à un voisinage de  $B(4/3\rho_1(t))$  soit l'identité. On prolonge  $K(t, u)$  par l'identité sur  $B^c(\pi - \rho_2)$ . Puisque  $\varphi(t)|B^c(\pi - \rho_2)$  a son image sur la partie visible d'une articulation et que  $f^s(t, u)$  y respecte la parallélisation, on a, d'après la condition 2',  $k(t, u)|B^c(\pi - \rho_2) = \text{Id}$ , donc  $k(t, u)r_B K(t, u) = r_B$ . □

Remarque. On tombe sur une difficulté pour que la famille  $(t, u) \rightarrow K(t, u)$  soit continue au sens  $C^1$  pour  $t$  proche d'une valeur  $t_0$  avec  $\rho_1(t_0) = 0$ . En fait, on a  $K(t_0, u) = k(t_0, u)^{-1}$  et la propriété que  $K(t, u)$  conserve la sphère de rayon  $5/3\rho(t)$  donnera lieu à la condition infinitésimale en  $x_1$  que  $D(k(t_0, u))|_{x_1}$  soit orthogonale. Elle n'est pas nécessairement satisfaite.

4.6. On aura besoin de passer à un espace  $C'$  homotopiquement équivalent à  $C$ . L'espace  $C'$  correspondra à une nouvelle notion de plongement isométrique d'une boule. Un plongement isométrique au nouveau sens sera une paire  $\langle \varphi, \eta \rangle$  où  $\varphi : B(\rho) \rightarrow M_i$  est un plongement, qui respecte les parallélisations et dont l'image est contenue dans la partie visible d'une articulation, et où  $\eta \in [0, 2]$  de façon que: (1) si  $\rho = \pi$ , alors  $\eta = 2$ ; (2) si  $\eta > 0$ , alors  $M_i$  est une articulation entièrement visible.

Dans la construction de somme connexe, le paramètre  $\eta$  n'intervient pas. On déclare non visible dans la somme connexe toute l'articulation qui reçoit une extrémité de bras donnée par un plongement isométrique  $\langle \varphi, \eta \rangle$  avec  $\eta > 0$ . Pour  $\eta = 0$ , on garde la notion originale de visibilité (2.4). Si  $\varphi : B(2\rho) \rightarrow M_i$  est un plongement mou tel que  $\varphi(B(2\rho))$  se trouve dans la partie visible d'une articulation et que  $\varphi|B(\rho)$  soit isométrique, on autorise le passage au plongement isométrique  $\langle \varphi|B(\rho), 0 \rangle$ . Un simplexe de plongements isométriques sera une famille continue  $t \rightarrow \langle \varphi_t, \eta_t \rangle (t \in D^k)$  de plongements isométriques de façon que  $\eta_t = 2$  pour  $t$  dans un voisinage de tout paramètre  $t_0$  avec  $\rho(t_0) = \pi$ . Le paramètre  $\eta$  sera utilisé pour modifier l'application  $p : \tilde{C} \rightarrow \Pi P_i$ .

Notons le nouvel espace de configurations par  $C'$ .

LEMME. *L'application d'oubli  $C' \rightarrow C$  est une équivalence d'homotopie.*

Par induction, on aura une fibration  $q' : \text{Diffext}' \rightarrow C'$  et un revêtement  $\Pi' : \tilde{C}' \rightarrow C'$ . Nous définirons une application  $p' : \tilde{C}' \rightarrow \prod_i P_i$  en utilisant une construction modifiée remplaçant celle de 4.2. L'insertion préliminaire d'une articulation invisible introduira, bien entendu, deux attachements isométriques  $\langle \varphi_i, \eta_i \rangle$  ( $i = 1, 2$ ) avec  $\eta_1 = \eta_2 = 0$ , recouvrant l'articulation. Dans la représentation de la configuration, on pourra toujours donner priorité aux bras à extrémités isométriques.

*Construction.* Soit  $X = A \#_L B$  où  $L$  est un bras de longueur nulle avec un attachement de type mou  $\varphi : B(2\rho) \rightarrow A$  et un attachement isométrique  $\psi : B^c(\rho) \rightarrow B$  de paramètre  $\eta$  (4.2). L'application  $r_A : X \rightarrow A$  sera modifiée. Elle sera déterminée par une application  $\alpha_\rho^\eta : B(2\rho) \rightarrow B(2\rho)$  de la forme:

$$\alpha_\rho^\eta(x) = \alpha^\eta\left(\frac{\|x\|}{\rho}\right) \cdot \frac{\rho}{\|x\|} \cdot x$$

où  $\alpha^\eta : [0, \infty] \rightarrow [0, \infty]$  est une famille continue d'applications continues.

On demande:

- (a)  $\alpha^\eta = \text{Id}$  sur  $[2, \infty)$ ,  $0 \leq \alpha^\eta(t) \leq 2$  pour tout  $0 \leq t \leq 2$  et  $\alpha^\eta$  est linéaire sur un voisinage de 0;
- (b)  $\eta = 0$  implique  $\alpha^0([0, 1]) = \{0\}$ ;
- (c)  $\eta = 2$  implique  $\alpha^2 = \text{Id}$ .

Si  $\eta > 0$ ,  $B$  est réduit à une articulation et on a une identification canonique  $X = A$  (en ne respectant pas les parallélisations). Ainsi, on pourra définir  $r_A$  sur  $\varphi(B(2\rho))$  au moyen de  $\alpha_\rho^\eta$  et sur le complémentaire par l'identité. Si  $\eta = 0$ , la condition (b) permet de définir  $r_A$  comme jadis au moyen de  $\alpha_\rho^0$ . Lorsque  $\rho$  tend vers 0, le rayon de l'attachement isométrique tend vers  $\pi$ , donc  $\eta = 2$  et  $r_A = \text{Id}$ ; la condition (a) assure la continuité pour  $x \rightarrow 0$ ; finalement  $r_A$  est continue, par rapport à  $x$  et au paramètre. D'Où:

PROPOSITION. *L'application  $p' : \tilde{C}' \rightarrow \prod \text{int } P_i$  est continue.*

Pour la suite, nous avons besoin de propriétés plus fortes sur les fonctions  $\alpha^\eta$ .

LEMME. (1) *Il y a une famille lisse  $\alpha^\eta : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ ,  $\eta \in [1, 2]$  de fonctions différentiables telles que, en plus des propriétés (a)–(c) ci-dessus, on ait:  $\alpha^\eta$  est un difféomorphisme pour  $\eta > 1$ ;  $\alpha^1([0, 5/3]) = \{0\}$ , et  $\alpha^1 : (5/3, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  est un difféomorphisme.*

(2) *Il y a une famille lisse de difféomorphismes:  $\Phi_s^\eta : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ ,  $s \in [0, \infty]$ ,  $\eta \in [1, 2]$ , satisfaisant l'équation  $s\alpha^\eta(t) = \alpha^\eta(\Phi_s^\eta(t))$  et telle que, pour  $t < 1$  et  $st < 1$ ,  $\Phi_s^\eta(t) = st$ ; en particulier  $\alpha^\eta$  est linéaire sur  $[0, 1]$ .*

*Preuve.* Pour  $\eta > 1$ , la famille  $u \rightarrow \Phi_{\exp u}^\eta$  sera un groupe à un paramètre, en correspondance avec une fonction  $X^\eta : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  par l'équation différentielle  $\frac{d}{du} \Phi_{\exp u}^\eta = X^\eta \cdot \Phi_{\exp u}^\eta$ ,  $\Phi_1^\eta = \text{Id}$ . Comme  $\alpha^\eta$ ,  $\eta > 1$ , conjugue le champ  $X^\eta$  avec le champ linéaire  $Y(t) = t$ , la fonction  $\alpha^\eta$  est solution de l'équation:

$$\frac{d}{dt} \log \alpha^\eta(t) = 1/X^\eta(t), \alpha^\eta(2) = 2.$$

Les fonctions  $\alpha^\eta$  et  $\Phi_s^\eta$  seront fournies par une famille lisse de fonctions différentiables  $X^\eta : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  telle que:

- (i)  $X^\eta(t) = t$  pour  $t \leq 1$  et  $t \geq 2$ ; pour tout,  $t$ ,  $0 \leq X^\eta(t) \leq t$ ;
- (ii)  $X^\eta(t) = 0 \Rightarrow t = 0$  ou  $\eta = 1$  et  $t = 5/3$ ;
- (iii)  $X^2 = \text{Id}$ .

Pour  $\eta = 1$ , on prendra  $\alpha^1(t)$ ,  $t > 5/3$ , la solution à l'équation différentielle et zéro ailleurs. On démontre facilement que la famille  $\alpha^\eta$  est continue dans la topologie  $C^1$ . □

Nous définirons  $\alpha^\eta = \alpha^1$  pour  $\eta \in [0, 1]$ .

4.7. Pour obtenir la propriété de Kan de  $p'$ , on procède comme dans 4.5. On sera contraint à proposer des familles  $k(t, u)$  et  $K(t, u)$  de difféomorphismes satisfaisant les conditions 2', 3' et 4'.

Soit  $\rho_1 > 0$ ,  $U$  un voisinage de  $e \in B(2\rho_1)$  et  $V$  un voisinage du bord de  $B(2\rho_1)$ . Considérons l'espace  $D = \{k \in \text{Diff } B(2\rho_1); k = \text{Id sur } V \text{ et } k^{-1} \text{ linéaire sur } U\}$ . On peut supposer que la famille  $k(t, u)$  se trouve dans un tel espace  $D$  en prenant  $U$  et  $V$  petits et en prescrivant  $k(t, u)^{-1}$  sur  $U$ .

Considérons l'équation pour  $k \in D$ ,  $\eta \in [1, 2]$  et  $\rho \in (0, \rho_1]$ :

$$(*) \quad k \alpha_\rho^\eta K(k, \eta, \rho) = \alpha_\rho^\eta.$$

Alors, pour  $\eta > 1$ ,  $\alpha_\rho^\eta$  étant un difféomorphisme,  $K(k, \eta, \rho)$  sera défini et dépendra continûment de  $(k, \eta, \rho)$ . Pour  $\eta = 2$ , on aura  $K(k, \eta, \rho) = k^{-1}$ .

L'équation (\*) détermine aussi les valeurs  $K(k, 1, \rho)(x)$  pour  $\|x\| > (5/3)\rho$ . Or la linéarité de  $k$  sur  $U$  mène à une solution de (\*) pour  $x \in (\alpha_\rho^\eta)^{-1}(U)$  comme suit:

$$(**) \quad K(k, \eta, \rho)(x) = \Phi_{\|k^{-1}x\|/\|x\|}^\eta \left( \frac{\|x\|}{\rho} \right) \cdot \frac{\rho}{\|k^{-1}x\|} \cdot k^{-1}x.$$

On utilisera cette équation pour définir  $K(k, 1, \rho)(x)$  pour  $x \in (\alpha_\rho^1)^{-1}(U) \supset B((5/3)\rho)$ . Pour  $x$  petit, le comportement de (\*\*) est donné par:

$$K(k, \eta, \rho)(x) = k^{-1}(x) \text{ si } \|x\| \leq \rho \text{ et } \|k^{-1}(x)\| \leq \rho.$$

Ainsi, il est facile de voir que  $K(k, \eta, \rho)$  dépend continûment au sens  $C^1$  de  $(k, \eta, \rho) \in D \times [1, 2] \times (0, \rho_1]$  et on pourra poser, pour  $\eta(t) \geq 1$ :

$$K(t, u) = K(k(t, u), \eta(t), \rho(t)), \quad \text{si } \rho(t) > 0$$

$$K(t, u) = \{k(t, u)\}^{-1}, \quad \text{si } \eta(t) = 2.$$

Il reste à définir la famille  $K(t, u)$  pour  $\eta(t) < 1$  de façon que  $K(t, u)|_{B((4/3)\rho(t))}$  soit l'identité si  $\eta(t) = 0$ . Considérons la famille de difféomorphismes  $k(t, \varepsilon u)$  ( $\varepsilon \in [0, 1]$ ). Remarquons que tout difféomorphisme  $K(*, 1, \rho)$  préserve la boule  $B((5/3)\rho)$ . Par conséquent, on donne une famille de plongements de  $(B(2\rho_1) - \text{Int } B((5/3)\rho(t))) \cup B((4/3)\rho(t))$  dans  $B(2\rho_1)$  par  $K(k(t, \varepsilon u), 1, \rho(t))$  sur  $B((4/3)\rho(t))$  et par  $K(k(t, u), 1, \rho(t))$  sur la région annulaire.

On peut relever cette famille en une famille continue de difféomorphismes  $K(t, u, \varepsilon)$  telle que  $K(t, 0, \varepsilon) = \text{Id}$ ,  $k(t, 0)$  étant l'identité, et que  $K(t, u, 1) = K(k(t, u), 1, \rho(t))$ . Ainsi, sur  $B((4/3)\rho(t))$  on a  $K(t, u, 0) = K(\text{Id}, 1, \rho(t)) = \text{Id}$ . On pose pour  $\eta(t) \leq 1$ :  $K(t, u) = K(t, u, \eta(t))$ . Ceci établit:

PROPOSITION. L'application  $p': \tilde{C}' \rightarrow \Pi \text{ int } P_i$  est une fibration de Kan.

Notation. Au dernier paragraphe,  $C$  et  $\tilde{C}$  désigneront les espaces de configurations que nous venons d'obtenir ici,  $C'$  et  $\tilde{C}'$ .

### §5. CONCLUSIONS

5.1 Rappelons que nous avons un revêtement galoisien  $\Pi: \tilde{C} \rightarrow C$  et une fibration  $p: \tilde{C} \rightarrow \prod_{i=1}^n \text{int } P_i$ . La fibration principale  $q: \text{Diffext} \rightarrow C$  de groupe  $\text{Diff} = \text{Diff}_\varepsilon(M_*)$  se relève en  $\tilde{q}: \text{Diffext} \rightarrow \tilde{C}$ . En effet, d'après le §3,  $\text{Diffext}$  se rétracte par déformation sur le sous-espace  $\mathcal{S} = \Pi \text{ Diffstand}(P_i) \times \Omega 0(3)^g$  ( $g =$  nombre d'anses), pour lequel le relèvement existe (4.4).

La fibration  $p\tilde{q}: \text{Diffext} \rightarrow \Pi \text{ int } P_i$  induit sur  $\mathcal{S}$  la fibration "valeurs aux points-base"  $\mathcal{S} \rightarrow \Pi \text{ int } P_i$ . Elles sont homotopiquement équivalentes. D'après Dold [2], leurs fibres ont le même type d'homotopie. L'une est  $\mathcal{S}_1 \sim \Pi \text{ Diff}_\varepsilon(P_i \text{ mod } D_i) \times \Omega 0(3)^g$  l'autre est notée  $\text{Diffext}_1$ . Si  $\tilde{C}_1$  désigne la fibre de  $p$  au-dessus du point-base, alors  $\text{Diffext}_1$  est donnée par la restriction de  $\tilde{q}$  au-dessus de  $\tilde{C}_1$ . La situation est résumée dans le diagramme 1.

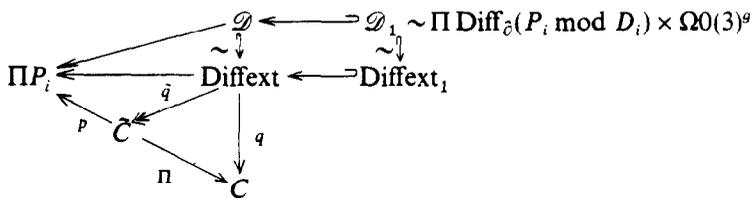


Diagramme 1

5.2. Pour les facteurs difféomorphes, on a choisi des identifications respectant les points-base et les parallélisations; ces choix peuvent être faits pour satisfaire la relation de cocycle. Soit  $S$  le sous-groupe des permutations  $\sigma$  de  $\{1, \dots, n\}$  telles que  $P_{\sigma(i)} \cong P_i$  et  $\sigma(i) = i$  si  $P_i$  n'est pas fermé;  $S$  agit donc sur  $\Pi \text{ int } P_i$  par permutation des facteurs fermés difféomorphes. Fixons l'action de  $S$  sur  $\tilde{C}$  par:

$$\sigma \langle c, Q_1, \dots, Q_n \rangle = \langle c, Q_{\sigma(1)}, \dots, Q_{\sigma(n)} \rangle;$$

l'équivariance de  $p$  détermine le sens de l'action sur  $\Pi \text{ int } P_i$ . Il est facile de déduire:

- PROPOSITION. (1)  $S$  agit librement sur  $\tilde{C}$  et le revêtement  $\Pi: \tilde{C} \rightarrow C$  se factorise par  $\tilde{C}/S$ .  
 (2) Le point-base de  $\Pi \text{ int } P_i$  est un point fixe pour  $S$ ; autrement dit,  $\tilde{C}_1$  est  $S$ -invariant.  
 (3) Dans le cas sans anse,  $\tilde{C}/S = C$ .

5.3. L'espace  $\tilde{C}/S$  est un revêtement au-dessus de  $C$ . Notons  $\hat{q}: \text{Diffext} \rightarrow \tilde{C}/S$  la fibration qui factorise  $\hat{q}$  et  $\widehat{\text{Diff}}$  la fibre au-dessus de  $\hat{q}(\text{Id}_M)$ . Notons  $\hat{G}$  la fibre de  $\tilde{C}/S \rightarrow C$  au-dessus du point-base  $*$ .

PROPOSITION. (1)  $\hat{G}$  peut être identifié au groupe  $(F_g)^n$ , où  $F_g$  est le groupe libre à  $g$  lettres et  $(F_g)^n$  agit naturellement à droite sur  $\hat{G}$ . (2) Il y a un homomorphisme  $\alpha: (F_g)^n \rightarrow \text{Diff}$  donnant un homéomorphisme:  $(F_g)^n \times \widehat{\text{Diff}} \rightarrow \text{Diff}: (\xi, f) \rightarrow \alpha(\xi) \circ f$ .

Démonstration. (1) Soit  $\hat{G}$  la fibre du revêtement galoisien  $\tilde{C} \rightarrow C$  au-dessus de  $*$ . Soit  $\langle *, Q_1, \dots, Q_n \rangle \in \hat{G}$ . Alors, chaque élément de  $\hat{G}$  est de la forme  $\langle *, Q'_1, \dots, Q'_n \rangle$ . Il y a un unique  $\sigma \in S$  tel que  $Q_i$  et  $Q'_{\sigma(i)}$  se projettent sur le même facteur via la projection  $\pi: \tilde{M}_* \rightarrow M_*$  (4.1). Ainsi, pour  $\sigma$  fixe, l'ensemble des choix pour  $Q'_i$  coïncide avec le groupe du revêtement de  $\pi, F_g$ , et  $\hat{G}$  a la structure de groupe, extension semi-directe de  $(F_g)^n$  par  $S \cdot \hat{G}$  s'identifie à  $S \backslash \hat{G}$ .

(2) On construit l'homomorphisme  $\alpha$  comme suit. Pour chaque  $P_i$ , on choisit un bouquet  $\Gamma_i$  de  $g$  cercles dans la configuration-base, disjointe des facteurs et servant d'âme à l'ensemble des  $g$  anses; autrement dit,  $\pi_1(\Gamma_i)$  représente le groupe de transformations du revêtement  $\tilde{M}_* \rightarrow M_*$ . La  $i$ -ième composante d'un élément  $\xi$  de  $(F_g)^n$  prescrit un glissement de Whitehead du facteur  $P_i$  le long de  $\Gamma_i$ . Le difféomorphisme  $\varphi_i$  de  $M_*$  qui en résulte commute avec les  $\varphi_j$ . On pose  $\alpha(\xi) =$  composition des  $\varphi_i$ . Or, pour  $f \in \text{Diff}$  et  $\xi \in (F_g)^n$  on a la propriété  $\hat{q}(\alpha(\xi) \circ f) = \hat{q}(f) \cdot \xi^{-1}$ , ce qu'on peut déduire de la propriété de revêtement de  $\Pi$ .  $\square$

5.4. Notons  $C_1 = \tilde{C}_1/S$ . On a la fibration composée  $\text{Diffext}_1 \rightarrow C_1$ , restriction de  $\text{Diffext} \rightarrow \tilde{C}/S$ , qui a pour fibre  $\widehat{\text{Diff}}$ . Elle donne lieu à une fibration principale homotopique  $\Omega C_1 \rightarrow \widehat{\text{Diff}} \rightarrow \text{Diffext}_1$ . Ici  $\beta: \Omega C_1 \rightarrow \widehat{\text{Diff}} \subset \text{Diff}$  est un morphisme de  $H$ -espaces. La fibration est triviale en homotopie, car  $\text{Diffext}_1$  a comme rétracte par déformation le sous-groupe  $\mathcal{D}_1$  de  $\text{Diff}$  qui se trouve dans  $\widehat{\text{Diff}}$  (et même dans la fibre de  $\hat{q}$ ). Nous avons donc le théorème suivant qui généralise le théorème 2 (1.4).

THEOREME. Il existe des morphismes de  $H$ -espaces:

$$\alpha: (F_g)^n \rightarrow \text{Diff}_0(M)$$

$$\beta: \Omega C_1 \rightarrow \text{Diff}_0(M \text{ mod } \partial M)$$

$\gamma$ : inclusion  $(\prod_{i=1}^n \text{Diff}_0(P_i \text{ mod } D_i)) \times \Omega(3)^g \subset \text{Diff}_0(M)$ , où  $D_i$  est une boule de  $\text{int } P_i$ , tels que l'application définie par  $h(x, y, z) = \alpha(x) \circ \beta(y) \circ \gamma(z)$  soit une équivalence d'homotopie.

*Exemple.* Soit  $P_1$  un facteur ayant un élément non central  $\eta$  dans son groupe fondamental,  $M = P_1 \# P_0 \# S^1 \times S^2$ , où  $P_0$  est le coeur. Le glissement de Whitehead de  $P_0 \# S^1 \times S^2$  le long de  $\eta$ , prolongé par l'identité sur  $M - P_1$ , est un difféomorphisme  $\varphi$  de  $M$  non isotope à l'identité mod  $\partial M$ . Il est dans l'image de  $\gamma$ . Si  $\alpha: X \rightarrow \text{Diff}$  est un morphisme de  $H$ -espaces, dont l'image contient les glissements de Whitehead de  $P_1$  et des pieds de l'anse,  $\alpha$  ne peut avoir pour image un supplémentaire homotopique de celle de  $\gamma$ ; en effet, on peut montrer que  $\varphi$  est isotope à un élément dans l'image de  $\alpha$ . Ceci montre que, dans le théorème, on ne peut pas grouper  $(F_\vartheta)^n$  et  $\Omega C_1$  en un espace de lacets.

**BIBLIOGRAPHIE**

1. E. CÉSAR DE SÁ et C. ROURKE: The homotopy type of homeomorphisms of 3-manifolds, *Bull. Am. Math. Soc. (new series)* **1** (1979), 251–254.
2. A. DOLD: Partitions of unity in the theory of fibrations, *Ann. Math* **78** (1963), p. 223–255.
3. A. HATCHER: Homeomorphisms of sufficiently large  $P^2$ -irreducible 3-manifolds, *Topology* **15** (1976), 343–347.
4. A. HATCHER: On the diffeomorphism group of  $S^1 \times S^2$ , *Proc. A. M. S.* **83** (1981), 427–430.
5. A. HATCHER: A proof of the Smale conjecture,  $\text{Diff}(S^3) \simeq O(4)$ , *Ann. Math* **117** (1983), 553–607.
6. H. KNESER: Geschlossene Flächen in dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten, *Jahresbericht Deutsch Math. Verein* **38** (1929), 248–260.
7. J. MILNOR: A unique decomposition theorem for 3-manifolds, *Am. J. Math.* **84** (1962), 1–7.
8. C. ROURKE et B. SANDERSON:  $\Delta$ -sets II: block bundles and block fibrations, *Q. J. Math. Oxford* **22** (1971), 465–485.
9. J. H. C. WHITEHEAD: The immersion of an open 3-manifold in Euclidean 3-space, *Proc. London Math. Soc.* **11** (1961), 81–90.

*Mathematisch Instituut  
Kath. Univ. Toernooiveld  
Nijmegen, Nederland*

et

*Université Paris-Sud  
Mathématique, Bâtiment 425  
91405 Orsay, France*