

---

Sur Les 2-Spheres D'une Variete de Dimension 3

Author(s): F. Laudenbach

Source: *Annals of Mathematics*, Jan., 1973, Second Series, Vol. 97, No. 1 (Jan., 1973), pp. 57-81

Published by: Mathematics Department, Princeton University

Stable URL: <https://www.jstor.org/stable/1970877>

---

JSTOR is a not-for-profit service that helps scholars, researchers, and students discover, use, and build upon a wide range of content in a trusted digital archive. We use information technology and tools to increase productivity and facilitate new forms of scholarship. For more information about JSTOR, please contact [support@jstor.org](mailto:support@jstor.org).

Your use of the JSTOR archive indicates your acceptance of the Terms & Conditions of Use, available at <https://about.jstor.org/terms>



is collaborating with JSTOR to digitize, preserve and extend access to *Annals of Mathematics*

JSTOR

# Sur les 2-sphères d'une variété de dimension 3

Par F. LAUDENBACH

## Introduction

Etant données deux sous-variétés  $S'$  et  $S''$  de dimension 2 dans une variété\*  $V$  de dimension 3, on dira que  $S'$  est *homotope* à  $S''$  s'il existe une surface  $S$  et deux plongements  $\varphi', \varphi'': S \rightarrow V$ , d'images respectives  $S'$  et  $S''$ , qui soient homotopes. On dira que  $S'$  et  $S''$  sont *isotopes* s'il existe un difféomorphisme  $H$  de  $V$ , isotope à l'identité, tel que  $H(S') = S''$ .

La question que nous voulons étudier est de savoir si la relation d'homotopie entraîne celle d'isotopie. La réponse est clairement négative dans sa généralité: il suffit de prendre dans  $\mathbf{R}^3$  deux noeuds non isotopes  $k'$  et  $k''$  et de prendre pour  $S'$  et  $S''$  les bords de voisinages tubulaires de  $k'$  et de  $k''$ . Des réponses positives ont déjà été données pour certains types de variétés de dimension 3 et des surfaces de genre non nul (Waldhausen [4]). Ici nous ne nous intéresserons qu'au cas des sphères.

Il faut noter que, si, quelque soit  $V$ , toute 2-sphère, plongée dans  $V$  et homotope à zéro, était le bord d'une 3-boule, alors la conjecture de Poincaré serait vraie. Ceci conduit à ne considérer dans la suite que les variétés de dimension 3 *satisfaisant à la conjecture de Poincaré* dans le sens précisé par la définition suivante:

*Définition.* Une variété  $V$  de dimension 3 satisfait à la conjecture de Poincaré, si la seule variété de dimension 3, compacte, contractile, plongeable dans  $V$ , est la boule  $D^3$ .

Pour avoir des exemples de telles variétés, on utilise, par exemple, la propriété suivante: si  $V \xrightarrow{P} V'$  est un revêtement et si  $V$  satisfait à la conjecture de Poincaré, alors  $V'$  a la même propriété, qui résulte du lemme 1.2(1°). En revanche, je ne sais pas prouver la réciproque. D'après ce critère, la somme connexe de  $n$  exemplaires de  $S^1 \times S^2$  satisfait à la conjecture de Poincaré; d'ailleurs, on peut montrer que les variétés orientées ayant cette

---

\* Une variété  $V$  peut avoir un bord, mais tout plongement d'une variété compacte dans  $V$  est supposé avoir une image à l'intérieur de  $V$ , et toute homotopie ou isotopie entre plongements est à support compact.

propriété forment un monoïde pour l'opération de somme connexe.

Nous pouvons maintenant énoncer nos principaux résultats.

**THÉORÈME I.** *Soit  $V$  une variété de dimension 3 satisfaisant à la conjecture de Poincaré; soient  $S$  et  $S'$  deux sphères plongées dans  $V$ . Si  $S$  est homotope à  $S'$ , alors  $S$  et  $S'$  sont isotopes.*

Si  $S$  est homotope à  $S'$ , alors il existe sûrement une *homotopie de disjonction* de  $S$  par rapport à  $S'$ , c'est-à-dire une application

$$F: S^2 \times [0, 1] \longrightarrow V$$

telle que  $F|_{S^2 \times \{0\}}$  soit un plongement d'image  $S$  et que  $F(S^2 \times \{1\})$  soit disjoint de  $S'$ . Alors le théorème II va réduire le théorème I au cas particulier où  $S$  et  $S'$  sont deux sphères plongées disjointes; la démonstration du théorème I dans ce cas particulier sera faite au paragraphe 1.

**THÉORÈME II.** *Soient  $V$ ,  $S$  et  $S'$  comme dans le théorème I. S'il existe une homotopie de disjonction de  $S$  par rapport à  $S'$ , alors il existe une isotopie de disjonction.*

C'est dans ce théorème que réside toute la difficulté; sa démonstration au paragraphe 4 repose sur une étude détaillée de l'information que fournit l'hypothèse d'une homotopie de disjonction (§ 2) et sur une méthode de coupures et recollements expliquée au paragraphe 3. Il sera d'autre part intéressant de voir que dans les paragraphes 2 et 3 on ne fait aucune hypothèse restrictive sur  $V$ .

Au départ, la motivation de ce travail était de généraliser à toutes les variétés de dimension 3 le résultat obtenu par Cerf dans le cas de  $S^3$  [1]: soit un difféomorphisme  $H: V \rightarrow V$  homotope à l'identité; est-il isotope à l'identité? Dans [4], Waldhausen a répondu affirmativement dans le cas des variétés "irréductibles suffisamment grandes"; l'exemple le plus simple échappant à Waldhausen est la somme connexe de  $p$  exemplaires de  $S^1 \times S^2$ ,  $p \neq 1^*$ , que nous noterons  $\#_p S^1 \times S^2$ . Or grâce au théorème I, nous avons prouvé le théorème suivant (cf. § 5):

**THÉORÈME III.** *Soit  $H: \#_p S^1 \times S^2 \rightarrow \#_p S^1 \times S^2$  un difféomorphisme homotope à l'identité. Alors  $H$  est isotope à l'identité.*

J'ai reçu pour ce travail beaucoup d'encouragements de Valentin Poenaru. Qu'il en soit ici remercié.

---

\* Le cas  $p=1$  a été traité par Gluck [2].

### 1. Un théorème d'isotopie facile

**THÉORÈME 1.1.** *Soit  $V$  une variété de dimension 3 satisfaisant à la conjecture de Poincaré. Soient  $S$  et  $S'$  deux sphères plongées dans  $V$  et disjointes. Si  $S$  est homotope à  $S'$ , alors  $S$  et  $S'$  sont isotopes.*

**LEMME 1.2.** *Soit  $V$  une variété de dimension 3 quelconque.*

1°) *Si  $S$  est une sphère plongée dans  $V$  homotope à zéro, alors  $S$  est le bord d'une variété contractile.*

2°) *Si  $S$  et  $S'$  sont deux sphères plongées disjointes non homotopes à zéro et si  $S$  est homotope à  $S'$ , alors  $S \cup S'$  est le bord d'un  $h$ -cobordisme.*

*Démonstration du lemme 1.2.* Soient  $\tilde{V}$  un revêtement universel de  $V$ ,  $\tilde{S}$  (resp.  $\tilde{S}'$ ) un relèvement de  $S$  (resp. de  $S'$ ) dans  $\tilde{V}$ .

1°)  $\tilde{S}$ , homotope à zéro dans  $\tilde{V}$ , borde une sous-variété  $\tilde{W}$  compacte, simplement connexe, donc contractile. Si  $\tilde{W}$  ne contient aucun autre relèvement de  $S$ , c'est que  $\tilde{W}$  est plongé dans  $V$  par la projection  $p: \tilde{V} \rightarrow V$ . Si ce n'est pas le cas, on choisit dans  $\tilde{W}$  un relèvement minimal de  $S$  et on se ramène au cas précédent.

2°) On peut choisir  $\tilde{S}$  et  $\tilde{S}'$  homotopes dans  $\tilde{V}$ . Puisqu'elles ne sont pas homotopes à zéro, individuellement elles ne bordent pas; alors, étant homologues, leur réunion est sûrement le bord d'une variété  $\tilde{W}$ , compacte, connexe, simplement connexe:  $\tilde{W}$  est un  $h$ -cobordisme. Quitte à changer les relèvements  $\tilde{S}$  et  $\tilde{S}'$ , on peut, comme dans le 1°), supposer que  $\tilde{W}$  ne contient aucun autre relèvement de  $S$  et de  $S'$ ; donc  $p|_{\tilde{W}}$  est un plongement. *cfqd.*

*Démonstration du théorème 1.1.* D'après le lemme 1.2, ou bien  $S = \partial W$ ,  $S' = \partial W'$ , où  $W$  et  $W'$  sont deux variétés contractiles, ou bien  $S \cup S' = \partial W$ , où  $W$  est un  $h$ -cobordisme. Mais,  $V$  satisfaisant à la conjecture de Poincaré, dans le premier cas  $W$  et  $W'$  sont des boules et dans le second cas  $W$  est un produit  $S^2 \times [0, 1]$ . En tous les cas  $S$  et  $S'$  sont isotopes. *cfqd.*

*Remarque.* Après le lemme 1.2, les théorèmes I et II sont triviaux si  $S$  est homotope à zéro. Dans la suite, nous excluons donc ce cas.

### 2. Homotopie de disjonction

(2.1) Dans tout ce paragraphe,  $V$  désigne une variété de dimension 3 et  $S$  une 2-sphère plongée dans  $V$ , non homotope à zéro. On fixe une orientation du fibré normal  $\nu(S, V)$ . Enfin  $S^2$  désigne une sphère de dimension 2 orientée. On s'intéresse à l'espace  $\tau$  (resp.  $\mathcal{H}$ ) des applications  $C^\infty$  de  $S^2$  (resp. de  $S^2 \times [0, 1]$ ) dans  $V$ , transversales sur  $S$ ; ces espaces sont munis de la topologie  $C^\infty$ .

Si  $f \in \tau$ ,  $f^{-1}(S)$  est une famille de courbes simples, disjointes et trans-

versalement orientées, déterminant sur  $S^2$  une stratification. On considère le complexe  $\Gamma(f)$ , nerf de cette stratification\*;  $\Gamma(f)$  est un arbre. Nous allons indiquer comment pondérer et orienter  $\Gamma(f)$  pour obtenir un objet sur lequel on pourra lire des obstruction au problème d'homotoper  $f$  jusqu'à  $f': S^2 \rightarrow V - S$  (cf. le théorème 2.6.2 et ses corollaires).

A mon sens, l'objet  $\Gamma(f)$  joue dans ce problème le même rôle que le groupe  $Z[\pi]$  dans le théorème de disjonction de Whitney.

(2.2) *Orientation et pondération du nerf.*

Fixons les notations suivantes: la même lettre désignera un sommet de  $\Gamma(f)$  et la composante de  $S^2 - f^{-1}(S)$  qui lui correspond; d'autre part si  $C$  est une composante de  $f^{-1}(S)$ ,  $A(C)$  sera l'arête correspondante de  $\Gamma(f)$ .

Ceci dit, chaque courbe  $C$  étant munie d'une orientation transversale, l'arête  $A(C)$  est naturellement orientée.

Sur chaque arête orientée nous mettons deux poids, l'un  $\alpha_-(A(C)) \equiv \alpha_-(C)$  du côté de son origine, l'autre  $\alpha_+(A(C)) \equiv \alpha_+(C)$  du côté de son extrémité;  $\alpha_-(C)$  et  $\alpha_+(C)$  sont des éléments de l'ensemble  $\tilde{\pi}_2(V, S)$  des classes d'homotopie d'applications de paires  $(D^2, \partial D^2) \rightarrow (V, S)$ . La courbe  $C$  borde sur  $S^2$  deux disques  $D_+(C)$  et  $D_-(C)$ , munis de l'orientation induite de  $S^2$ ; la normale positive à  $C$  sort de  $D_-(C)$  et rentre dans  $D_+(C)$ . Alors, pour  $\varepsilon \in \{+, -\}$ ,  $\alpha_\varepsilon(C)$  est la classe de  $f|D_\varepsilon(C)$ .

Il est utile de remarquer que l'ensemble  $\tilde{\pi}_2(V, S)$  s'identifie naturellement au quotient de  $\pi_2(V, x)$  par le sous-groupe engendré par  $S$  (le point-base  $x$  est choisi sur  $S$ ). Par conséquent  $\tilde{\pi}_2(V, S)$  est en fait un groupe abélien.

D'autre part, on attribue un poids à chaque couple ordonné  $(A(C), A(C'))$  d'arêtes. Dans  $S^2$  choisissons un chemin orienté  $\gamma$  joignant  $C$  à  $C'$ ;  $f|\gamma: (\gamma, \partial\gamma) \rightarrow (V, S)$  représente un élément  $\omega(A(C), A(C')) \equiv \omega(C, C')$ , indépendant de  $\gamma$ , dans l'ensemble  $\tilde{\pi}_1(V, S)$  des classes d'homotopie d'applications de paires

$$([0, 1], \{0, 1\}) \longrightarrow (V, S).$$

On peut d'ailleurs remarquer que,  $S$  étant simplement connexe,  $\tilde{\pi}_1(V, S)$  est naturellement isomorphe à  $\pi_1(V)$ ; il y a donc sur  $\tilde{\pi}_1(V, S)$  une structure naturelle de groupe. On a  $\omega(C, C') = \omega(C', C)^{-1}$ .

(2.3) *Modification du graphe  $\Gamma(f)$  sous l'effet d'une homotopie de  $f$ .*

Si  $h \in \mathcal{H}$ , on dira que  $h$  est une *homotopie élémentaire* de  $f$  si  $h_0 = f$  et si  $h^{-1}(S)$  est un cobordisme élémentaire, ce qui veut plus précisément dire la

\* L'ensemble des sommets de  $\Gamma(f)$  est  $\pi_0(S^2 - f^{-1}(S))$  et l'ensemble des arêtes est  $\pi_0(f^{-1}(S))$ ; les relations d'incidence sont évidentes.

chose suivante:  $p: S^2 \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  étant la projection naturelle, la fonction  $p|_{h^{-1}(S)}$  est une fonction de Morse ayant un unique point critique. Génériquement, une homotopie est décomposable en une succession d'homotopies élémentaires.

Si  $h$  est une homotopie élémentaire, on passe de  $\Gamma(h_0)$  à  $\Gamma(h_1)$  par l'une des quatre opérations suivantes:

I *Effondrement* (collapsing) d'une arête ayant une extrémité libre.

I bis *Expansion*: c'est l'opération opposée de I.

II *Coalescence* (folding) de deux arêtes: Soient  $A_1$  et  $A_2$  deux arêtes de  $\Gamma(h_0)$  ayant un sommet commun  $x$ ;  $y_1$  et  $y_2$  désignent leurs deux autres sommets; alors il existe des sous-arbres  $\Gamma_0$ ,  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  tels que

$$\Gamma(h_0) = \Gamma_0 \vee_x (A_1 \vee_{y_1} \Gamma_1) \vee_x (A_2 \vee_{y_2} \Gamma_2) .$$

On passe de  $\Gamma(h_0)$  à  $\Gamma(h_1)$  en identifiant les deux arêtes  $A_1$  et  $A_2$  en une seule arête  $A$  d'extrémités  $x$  et  $y$ , résultat de l'identification de  $y_1$  et  $y_2$ :

$$\Gamma(h_1) = \Gamma_0 \vee_x A \vee_y (\Gamma_1 \vee_y \Gamma_2) .$$

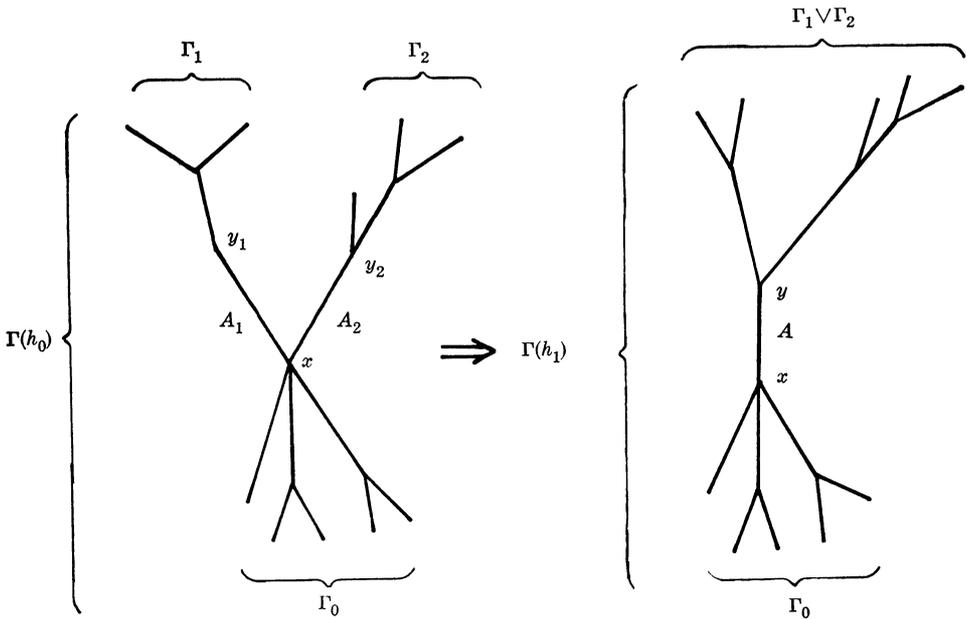


FIGURE 1

II bis *Scindement d'une arête*: c'est l'opération opposée de II.

Les quatre opérations que nous venons de décrire, nous les appellerons *opérations formelles sur un arbre*; les opérations I et II sont des *réductions formelles*.

Il est clair qu'étant données  $f \in \tau$  et une opération formelle sur  $\Gamma(f)$ , il

n'existe pas en général d'homotopie élémentaire  $h \in \mathcal{K}$  telle que  $h_0 = f$  et qui réalise cette opération formelle. Le but de ce qui suit est de décrire quelles sont les opérations formelles *admissibles*, c'est-à-dire réalisables par une homotopie élémentaire, et de dire ce que deviennent les poids dans le cas d'une réduction admissible.

(2.4) *Obstruction à l'effondrement d'une arête.*

PROPOSITION 2.4.1.

1°) *L'effondrement de l'arête  $A(C)$  est admissible si et seulement si  $\alpha_\varepsilon(C) = 0$ , où  $\varepsilon$  est le signe de l'extrémité libre.*

2°) *Si cette condition est satisfaite et si  $h$  est une homotopie élémentaire réalisant l'effondrement de  $A(C)$ , alors  $\Gamma(h_0) = \Gamma(h_1) \vee A(C)$  et les arêtes de  $\Gamma(h_1)$  sont orientées et pondérées comme dans  $\Gamma(h_0)$ .*

*Démonstration.* Dire que  $A(C)$  a une extrémité libre, c'est dire que  $C$  borde sur  $S^2$  un disque  $D$  minimal, c'est-à-dire tel que  $\text{int } D$  soit une cellule de codimension 0 dans la stratification. Dire que  $\alpha_\varepsilon(C) = 0$ , c'est dire que  $f|D$  représente 0 dans  $\tilde{\pi}_2(V, S)$ .

La nécessité de la condition et le 2°) sont évidents; démontrons la suffisance.

Nous avons besoin de la 3-boule anguleuse à arête saillante notée  $B$ ;  $\partial_+ B$  et  $\partial_- B$  désignent les hémisphères supérieures et inférieures de son bord et  $\partial_+ B \cap \partial_- B$  est l'arête anguleuse. Nous identifions le disque  $D$  à  $\partial_- B$ . Il faut démontrer l'existence d'une application  $C^\infty$   $F: B \rightarrow V$ , transversale sur  $S$ , telle que  $F|_{\partial_- B} = f|D$  et  $F^{-1}(S) = \partial_+ B$ . Or l'hypothèse affirme seulement l'existence de  $F: B \rightarrow V$  telle que  $F|_{\partial_- B} = f|D$  et  $F(\partial_+ B) \subset S$ ; on peut bien entendu supposer  $F$   $C^\infty$  et transversale sur  $S$ ; alors  $F^{-1}(S) = \partial_+ B \cup X$ , où  $X$  est une surface fermée dans l'intérieur de  $B$  (cf. fig. 2).

Nous allons modifier  $F$  dans l'intérieur de  $B$  pour tuer la composante  $X$  de  $F^{-1}(S)$ . Supposons  $X$  connexe; si  $X$  n'est pas connexe, on appliquera le processus successivement à chacune de ses composantes.  $X$  borde une variété  $W$  dans  $\text{int } B$ . Puisque dans tout ce paragraphe nous avons fait l'hypothèse que  $S$  n'est pas homotope à zéro, le lemme 2.4.2 ci-dessous implique que  $F|X$  est homotope à zéro. Ainsi  $F|X$  se prolonge en une application  $g: W \rightarrow S$ . Définissons alors  $G: B \rightarrow V$  par  $G|B - \text{int } W = F$  et  $G|W = g$ . Soit  $\psi$  un difféomorphisme de  $V$ , à support dans un petit voisinage tubulaire  $U$  de  $S$ , tel que  $\psi(S) \cap S = \emptyset$  et que  $\psi(S)$  se trouve du côté des normales positives (resp. négatives) si, pour l'orientation induite par la transversalité de  $F$  sur  $S$ , les normales positives à  $X$  sortent de (resp. rentrent dans)  $W$ . L'application cherchée est alors une  $C^\infty$ -approximation de l'application donnée par

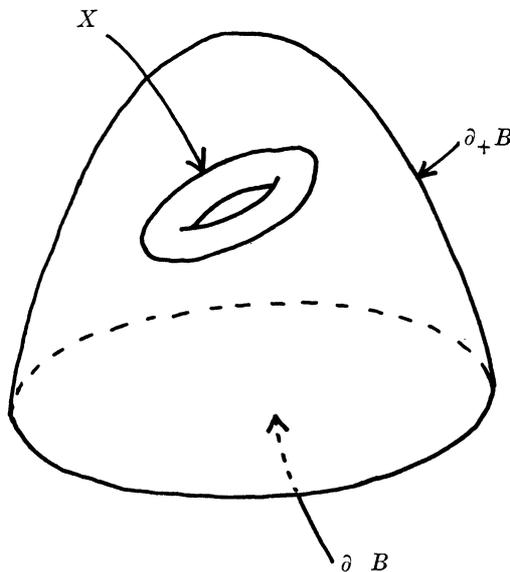


FIGURE 2

$G|B - G^{-1}(U)$  et  $\psi G|G^{-1}(U)$ . Dans le cas général, ce processus tue en même temps toutes les composantes de  $F^{-1}(S)$  intérieures à  $W$ .

**LEMME 2.4.2.** *Soit  $W$  une sous-variété de dimension 3 dans  $\text{int } D^3$ , compacte, à bord connexe. Soit  $F: W \rightarrow V$  une application continue telle que  $F(\partial W) \subset S$ . Alors*

1°) *il existe un prolongement  $\hat{F}: D^3 \rightarrow V$  tel que  $\hat{F}(D^3 - \text{int } W) \subset S$ .*

2°) *si  $S$  n'est pas homotope à zéro, alors  $F|\partial W: \partial W \rightarrow S$  est homotope à zéro.*

*Preuve du lemme.* On passe de  $W$  à  $D^3$  en attachant des anses d'indices 1 et 2. Il n'y a donc aucune obstruction à prolonger  $F|\partial W$  en une application  $D^3 - \text{int } W \rightarrow S$ , ce qui prouve le 1°. On en déduit que le degré de  $\hat{F}|\partial D^3$  est le même que le degré de  $F|\partial W$ . Si ce degré n'est pas nul c'est que  $S$  représente un élément de torsion dans  $\pi_2(V)$ . Or d'après Specker [3],  $\pi_2(V)$  est un groupe libre. Par conséquent, si  $S$  n'est pas homotope à zéro, on doit avoir  $\text{deg } F|\partial W = 0$ , ce qui prouve le 2°).

(2.5) *Obstruction à la coalescence de deux arêtes.*

**PROPOSITION.** *Soient  $A(C_1)$  et  $A(C_2)$  deux arêtes ayant un sommet commun  $s$ .*

1°) *Pour que la coalescence de  $A(C_1)$  et de  $A(C_2)$  soit admissible, il faut et il suffit que l'élément  $\omega(C_1, C_2) \in \tilde{\pi}_1(V, S)$  soit nul.*

2°) Si cette condition est satisfaite et si  $h$  est une homotopie élémentaire réalisant cette coalescence, on a:

(i) la projection naturelle  $p: \Gamma(h_0) \rightarrow \Gamma(h_1)$  respecte l'orientation des arêtes,

(ii) si  $A'$  et  $A''$  sont deux arêtes de  $\Gamma(h_0)$

$$\omega(p(A'), p(A'')) = \omega(A', A'') \quad \text{dans } \tilde{\pi}_1(V, S),$$

(iii) si  $A'$  est une arête de  $\Gamma(h_0)$  distincte de  $A(C_1)$  et de  $A(C_2)$ , on a, dans  $\tilde{\pi}_2(V, S)$ ,  $\alpha_\varepsilon(p(A')) = \alpha_\varepsilon(A')$  pour  $\varepsilon \in \{+, -\}$ .

(iv) si  $\varepsilon$  est le signe de l'extrémité  $s$  sur l'arête orientée  $A(C_1)$  ou  $A(C_2)$ , on a

$$\begin{aligned} \alpha_{-\varepsilon}(p(A(C_1))) &\equiv \alpha_{-\varepsilon}(p(A(C_2))) = \alpha_{-\varepsilon}(A(C_1)) + \alpha_{-\varepsilon}(A(C_2)) \\ \alpha_\varepsilon(p(A(C_1))) &= \alpha_\varepsilon(A(C_1)) - \alpha_{-\varepsilon}(A(C_2)). \end{aligned}$$

*Démonstration.* Dans le 1°, la nécessité de la condition est évidente. Dans le 2°, le (i) découle de la transversalité de  $h$  sur  $S$  et les autres points constituent un exercice élémentaire d'homotopie.

Dans le 1°, démontrons la suffisance de la condition. Soit  $\gamma$  un chemin plongé joignant  $C_1$  et  $C_2$  dans la strate  $s$ . Soient  $\Delta$  un 2-disque avec deux coins,  $\partial_+\Delta$  et  $\partial_-\Delta$  les hémisphères Nord et Sud de son bord; on identifiera  $\gamma$  à  $\partial_-\Delta$ . Par hypothèse, il existe une application  $C^\infty F: \Delta \rightarrow V$ , telle que  $F|_{\partial_-\Delta} = f|_\gamma$  et  $F(\partial_+\Delta) \subset S$ .

Pour pouvoir rendre  $F$  transversale sur  $S$ , il faut remarquer que les orientations transversales des courbes  $C_1$  et  $C_2$  sont cohérentes, c'est-à-dire

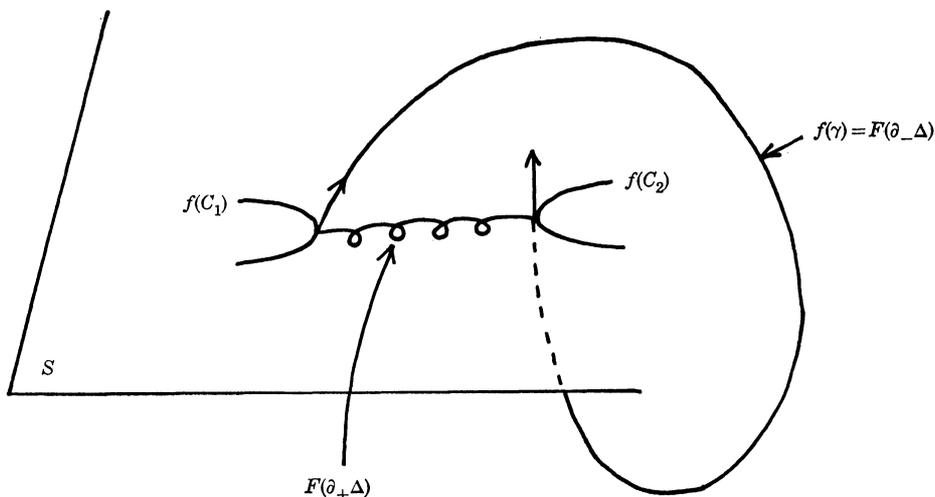


FIGURE 3

que la normale positive à  $C_1$  rentre ou sort de la strate  $s$  en même temps que la normale positive à  $C_2$ . Or, si ce n'était pas le cas, la courbe  $F(\partial\Delta)$  serait homotope à une courbe ne rencontrant  $S$  qu'en un seul point et ne serait donc pas homotope à zéro (cf. fig. 3).

On peut maintenant supposer  $F$  transversale sur  $S$ ;  $F^{-1}(S)$  est constitué par  $\partial_+\Delta$  et des courbes fermées intérieures à  $\Delta$ . D'après le théorème de van Kampen l'inclusion  $V - S \hookrightarrow V$  induit une injection  $\pi_1(V - S) \rightarrow \pi_1(V)$ . On peut donc choisir  $F$  tel que  $\text{int } \Delta \cap F^{-1}(S) = \emptyset$ . C'est tout ce qu'il faut pour construire l'homotopie cherchée. cqfd.

*Remarques.* 1°) Dans les propositions 2.4.1 et 2.5, il faut noter l'importance du 2°), puisqu'il dit que le graphe  $\Gamma(h_i)$ , avec son orientation et ses poids, ne dépend pas de l'homotopie  $h$  qui réalise l'opération formelle considérée.

2°) En ce qui concerne les opérations I bis et II bis, il est immédiat de voir qu'il n'y a aucune obstruction à les réaliser par une homotopie élémentaire. En revanche on ne peut calculer les poids du nouveau graphe sans se donner l'homotopie.

## (2.6) Forme réduite

(2.6.1) *Définitions.*  $-\Gamma(f)$  sera dit réduit s'il n'existe aucune réduction admissible de  $\Gamma(f)$ .

$-\Gamma(f)$  sera dit II-réduit s'il n'existe aucune coalescence admissible.

$-\Gamma(f)$  et  $\Gamma(f')$  sont isomorphes, s'il existe un isomorphisme des complexes simpliciaux sous-jacents respectant les orientations et les poids.

**THÉORÈME 2.6.2.** Soient  $f_0, f_1, f_2: S^2 \rightarrow V$  trois éléments de  $\tau$ .

1°) On suppose que, pour  $i = 1, 2$ ,  $\Gamma(f_i)$  est II-réduit et que l'on passe de  $\Gamma(f_0)$  à  $\Gamma(f_i)$  par une suite de coalescences admissibles. Alors  $\Gamma(f_1)$  et  $\Gamma(f_2)$  sont isomorphes.

2°) On suppose que, pour  $i = 1, 2$ ,  $\Gamma(f_i)$  est réduit et que l'on passe de  $\Gamma(f_0)$  à  $\Gamma(f_i)$  par une suite de réductions admissibles. Alors  $\Gamma(f_1)$  et  $\Gamma(f_2)$  sont isomorphes.

Ce théorème entraîne les corollaires suivants:

**COROLLAIRE 2.6.3.** Soient  $f_1, g_1, f_2, g_2 \in \tau$  des applications homotopes. On suppose que, pour  $i = 1, 2$ , l'on passe de  $\Gamma(f_i)$  à  $\Gamma(g_i)$  pour une suite de réductions admissibles et que  $\Gamma(g_i)$  est réduit. Alors  $\Gamma(g_1)$  et  $\Gamma(g_2)$  sont isomorphes.

*Preuve.* Il suffit de démontrer ce corollaire dans le cas où  $f_1$  et  $f_2$  sont homotopes par une homotopie élémentaire. Disons alors que l'on passe de  $\Gamma(f_1)$  à  $\Gamma(f_2)$  par une réduction admissible. On passe de  $\Gamma(f_1)$  à  $\Gamma(g_2)$  par une

suite de réductions admissibles. D'après le théorème,  $\Gamma(g_1)$  et  $\Gamma(g_2)$  sont isomorphes.

Les corollaires suivants sont maintenant immédiats.

**COROLLAIRE 2.6.4.** *Si  $h: S^2 \times [0, 1] \rightarrow V$ , élément de  $\mathcal{K}$ , est une homotopie de disjonction (c'est-à-dire  $h(S^2 \times \{1\}) \subset V - S$ ), alors  $\Gamma(h_0)$  peut être réduit à un point par une suite de réductions admissibles.*

Réénonçons ce corollaire sous la forme d'une théorie d'obstruction:

**COROLLAIRE 2.6.5.** *Soit  $f \in \tau$ . Pour que  $f$  soit homotope à  $f': S^2 \rightarrow V - S$ , il faut et il suffit qu'il existe une suite de réductions admissibles de  $\Gamma(f)$ , le réduisant à un point.*

*Démonstration du théorème 2.6.2. 1ère Partie.* Pour  $j = 0, 1, 2$ , notons  $E_j$  l'ensemble des arêtes de  $\Gamma(f_j)$ . On a des projections naturelles  $p_i: E_0 \rightarrow E_i$  ( $i = 1, 2$ ), ou encore des relations d'équivalence  $R_i$  sur  $E_0$ .

**LEMME 2.6.6.**  *$\Gamma(f_i)$  est entièrement déterminé par  $\Gamma(f_0)$  et par la relation d'équivalence  $R_i$ .*

*Preuve du lemme.* Puisque les arêtes de  $\Gamma(f_0)$  sont orientées et compte tenu de la proposition 2.5 2°) (i), l'arbre sous-jacent à  $\Gamma(f_i)$  est déterminé par  $R_i$ , ainsi que l'orientation de ses arêtes. D'après 2.5 2°) (ii), pour deux arêtes  $A'$  et  $A''$  de  $\Gamma(f_0)$  on a

$$\omega(p_i(A'), p_i(A'')) = \omega(A', A'') .$$

Il reste à calculer les poids  $\alpha_i(A)$  d'une arête orientée  $A$  de  $\Gamma(f_i)$ . On note  $C_1, \dots, C_n$  les composantes de  $f_0^{-1}(S)$  auxquelles correspondent des arêtes de  $\Gamma(f_0)$  appartenant à  $p_i^{-1}(A)$ . Ces courbes définissent sur  $S^2$  une stratification dont les cellules de codimension 0 sont notées  $U_1, \dots, U_{n+1}$ . On a alors la propriété suivante:

(P) Les normales positives à toutes les composantes du bord d'une même cellule pointent simultanément vers l'intérieur ou vers l'extérieur de la cellule.

La propriété (P) est triviale dans le cas où  $n = 1$ . De plus il est immédiat de vérifier qu'elle est invariante par les opérations du type II bis (scindement d'arête). Par conséquent, quelque soit  $n$ , on peut prouver la propriété (P) en remontant la suite de scindements qui fait passer de  $\Gamma(f_i)$  à  $\Gamma(f_0)$ .

On dira que  $U_j$  est une cellule positive si les normales positives au bord de  $U_j$  pointent vers l'intérieur. Soient  $U_1, \dots, U_q$  les cellules positives; pour  $j \in \{1, \dots, q\}$ ,  $C_{j,1}, \dots, C_{j,n_j}$  désignent les composantes de  $\partial U_j$ . On a évidemment

ment  $\sum_{j=1}^q n_j = n$ . La formule 2.5 2°) (iv) se généralise ainsi:

$$\alpha_+(A) = \sum_{j=1}^q [\alpha_+(C_{j,1}) - \sum_{k=2}^{n_j} \alpha_-(C_{j,k})]$$

étant entendu que si  $n_j = 1$ ,  $\sum_{k=2}^{n_j} \alpha_-(C_{j,k}) = 0$ . On peut écrire une formule analogue pour  $\alpha_-(A)$ .

*Démonstration du théorème 2.6.2 (suite).* Il reste à prouver que  $\Gamma(f_1)$  et  $\Gamma(f_2)$  étant II-réduits, les relations  $R_1$  et  $R_2$  sont les mêmes. Soient  $A_1$  et  $A_2$  deux arêtes de  $\Gamma(f_0)$  équivalentes modulo  $R_1$ ; d'après la proposition 2.5, on a

$$0 = \omega(p_1(A_1), p_1(A_2)) = \omega(A_1, A_2) = \omega(p_2(A_1), p_2(A_2)).$$

Soit  $\Gamma$  l'arbre minimal contenant  $A_1$  et  $A_2$ ; c'est un arbre sans branchement, ou *arbre linéaire*. Si  $R_1$  et  $R_2$  coïncident sur  $\Gamma$ , alors  $A_1$  et  $A_2$  sont aussi équivalentes modulo  $R_2$ . Il suffit donc de prouver que  $R_1$  et  $R_2$  coïncident sur tous les sous-arbres linéaires de  $\Gamma(f_0)$ . Cette propriété se prouve par récurrence sur le nombre d'arêtes du sous-arbre linéaire  $\Gamma$ . Si  $\Gamma$  n'a qu'une arête il n'y a rien à dire. Si  $\Gamma$  a deux arêtes et si elles sont équivalentes modulo  $R_1$ , elles le sont aussi modulo  $R_2$ , sinon leurs projections dans  $\Gamma(f_2)$  seraient deux arêtes consécutives à coalescence admissible d'après la proposition 2.5 et  $\Gamma(f_2)$  ne serait pas II-réduit.

Supposons la propriété démontrée pour tous les arbres linéaires de longueur  $n - 1$ . Considérons un arbre linéaire de longueur  $n$   $\Gamma = A_1 \vee \Gamma' \vee A_2$ , où  $A_1$  et  $A_2$  sont les arêtes extrêmes et  $\Gamma'$  un arbre linéaire de longueur  $n - 2$ . Trois cas se présentent:

(1) Il existe  $i$  et  $j$  dans  $\{1, 2\}$  tels que  $A_i$  soit équivalente modulo  $R_j$  à une arête de  $\Gamma'$ . Dans ce cas l'hypothèse de récurrence fait que  $R_1$  et  $R_2$  coïncident sur  $\Gamma$ .

(2) On n'est pas dans le premier cas et  $A_1$  n'est équivalente à  $A_2$  ni modulo  $R_1$  ni modulo  $R_2$ . Ce cas est trivial.

(3) On n'est pas dans le premier cas et  $A_1$  est équivalente à  $A_2$  modulo  $R_1$ .

Grâce au raisonnement fait pour  $n = 2$ , pour montrer que  $p_2(A_1) = p_2(A_2)$  il suffit de prouver que  $p_2(A_1)$  et  $p_2(A_2)$  ont au moins un sommet commun; c'est ce que nous allons faire en n'utilisant que des propriétés des graphes orientés, indépendamment de la considération des poids. Soient  $\Gamma'_1$  et  $\Gamma'_2$  les images de  $\Gamma'$  dans  $\Gamma(f_1)$  et dans  $\Gamma(f_2)$  respectivement. Puisque  $R_1$  et  $R_2$  coïncident sur  $\Gamma'$ , les graphes orientés  $\Gamma'_1$  et  $\Gamma'_2$  sont isomorphes. Si donc les extrémités de  $\Gamma'$  sont identifiées dans  $\Gamma'_1$ , elles le sont aussi dans  $\Gamma'_2$ . Or pour que les extrémités de  $\Gamma'$  ne soient pas identifiées dans  $\Gamma'_1$ , il faut avoir dans  $\Gamma(f_1)$  la configuration de la figure 4. Sachant que  $\Gamma(f_1)$  est un arbre, ce phénomène ne peut arriver que si  $A_1$  est congrue modulo  $R_1$  à une arête de  $\Gamma'$ ;

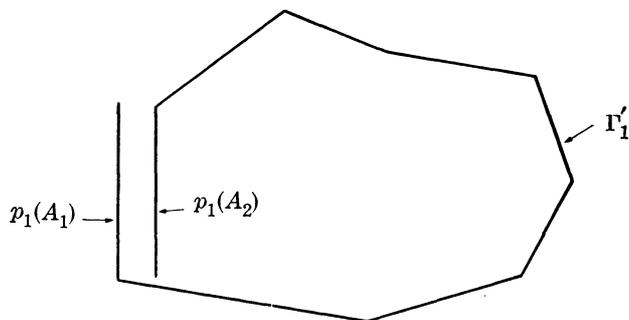


FIGURE 4

cette situation est précisément exclue par le cas (3).

Ceci achève la démonstration de la première partie du théorème.

*2<sup>ème</sup> Partie.* Commençons par la remarque suivante: si, sur  $\Gamma(f)$ , on fait successivement un effondrement admissible et une coalescence admissible, on peut faire les opérations dans l'ordre inverse sans changer le résultat, d'après les propositions 2.4.1 et 2.5. Par conséquent, on peut supposer que l'on passe, pour  $i = 1, 2$ , de  $\Gamma(f_0)$  à  $\Gamma(f_i)$  en faisant d'abord les réductions par coalescence, ce qui conduit à  $\Gamma(f'_i)$ , puis les réductions par effondrement. Mais il faut faire attention que  $\Gamma(f'_i)$  n'est peut-être pas II-réduit et donc qu'éventuellement  $\Gamma(f'_1)$  n'est pas isomorphe à  $\Gamma(f'_2)$ .

Si  $\Gamma(f'_1)$  n'est pas II-réduit, il est de la forme indiquée sur la figure 5

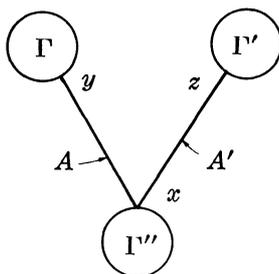


FIGURE 5

où la coalescence de  $A$  et de  $A'$  est admissible. Puisque l'on passe, par des effondrements admissibles de  $\Gamma(f'_1)$  à  $\Gamma(f_i)$  qui est réduit, c'est que  $\Gamma \vee A$  (ou  $\Gamma' \vee A'$ ) peut être réduit à  $x$  par des effondrements admissibles. Je dis qu'on obtient le même résultat en identifiant d'abord  $A$  et  $A'$  puis en effondrant  $\Gamma$  sur  $y = z$ . C'est évident en ce qui concerne le complexe sous-jacent et les orientations. Regardons les poids: puisque l'on peut réaliser l'effondrement de  $\Gamma \vee A$ , d'après la proposition 2.4.1,  $\alpha_\varepsilon(A) = 0$  dans  $\tilde{\pi}_2(V, S)$ , où  $\varepsilon$

est le signe de  $y$  sur l'arête orientée  $A$ ; le poids de l'arête résultant de l'identification est donc celui de  $A'$ . Tous les autres poids sont trivialement inchangés.

Pour passer de  $\Gamma(f'_i)$  à  $\Gamma(f_i)$ , on peut d'abord, par des coalescences admissibles, construire la forme II-réduite  $\Gamma(f''_i)$  et ensuite, par des effondrements admissibles, on retrouve  $\Gamma(f_i)$ . Mais  $\Gamma(f''_1)$  et  $\Gamma(f''_2)$  sont des formes II-réduites de  $\Gamma(f_0)$ ; alors d'après la première partie, elles sont isomorphes.

Pour conclure, il suffit de remarquer que si  $\Gamma(f)$  est II-réduit, il n'y a qu'une seule façon de le réduire par des effondrements admissibles, à l'ordre près d'opérations commutant trivialement. cqfd.

### 3. Coupures et recollements

Dans ce paragraphe, il s'agit de mettre en place une technique qui permettra de contourner toutes les difficultés dues aux noeuds dans le problème de disjointre deux sphères plongées dans une variété de dimension 3.

#### (3.1) Modèles.

Dans le disque  $D^2$ , considérons une famille de courbes simples, deux à deux disjointes,  $c_1, \dots, c_n, c_{n+1}, \dots, c_{n+m}$ , telles que  $c_{n+j}$  ne soit pas intérieure à  $c_i$ , pour  $j = 1, \dots, m$  et  $i = 1, \dots, n$ .

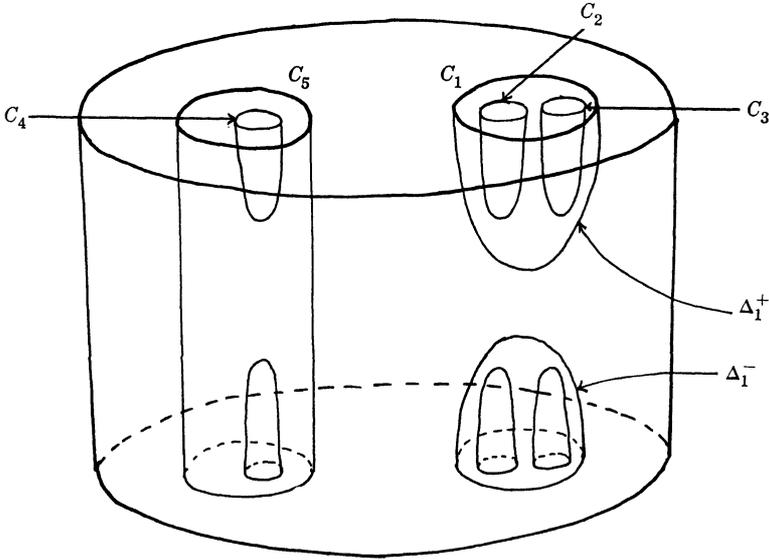
Dans  $D^2 \times [1/2, 1]$ , les courbes  $c_1 \times \{1\}, \dots, c_n \times \{1\}$  bordent des disques  $\Delta_1^+, \dots, \Delta_n^+$ , plongés, mutuellement disjoints, disjoints des cylindres  $c_{n+j} \times [1/2, 1]$  pour  $j = 1, \dots, m$ , et transversaux à  $D^2 \times \{1\}$  le long de leur bord. Ces disques sont uniques à isotopie près.

Dans  $D^2 \times [-1, +1]$ , on considère les disques  $\Delta_i^+$  ( $i = 1, \dots, n$ ), leurs symétriques  $\Delta_i^-$  par rapport à  $D^2 \times \{0\}$ , ainsi que les cylindres  $c_{n+j} \times [-1, +1]$  ( $j = 1, \dots, m$ ). Le tout constitue ce que nous appellerons un modèle à  $n$  recollements et à  $m$  coupures, ou plus brièvement de type  $(n, m)$  (cf. fig. 6).

Nous allons décrire des opérations permettant de passer d'un modèle de type  $(n, m)$  à un modèle de type  $(n - 1, m + 1)$  et ainsi de suite jusqu'à un modèle de type  $(0, n + m)$ , dans lequel toutes les surfaces sont des cylindres.

#### (3.2). Recollement dans le modèle.

Sur chaque disque  $\Delta_i^+$  (resp.  $\Delta_i^-$ ), choisissons un point  $b_i^+$  (resp.  $b_i^-$ ). Pour  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ , on joint  $b_i^+$  et  $b_j^+$  si le disque  $\Delta_i^+$  est directement au-dessus de  $\Delta_j^+$ ; et dans ce cas on joint symétriquement  $b_i^-$  et  $b_j^-$ . Pour  $i \in \{1, \dots, n\}$ , on joint  $b_i^+$  et  $b_i^-$  si ces deux points peuvent être joints sans traverser aucune des surfaces. On choisit les chemins de jonction non noués, non enlacés et



type (4, 1)

FIGURE 6

normaux aux disques auxquels appartiennent leurs extrémités. On obtient ainsi une variété de dimension 1 à points de branchement notée  $\Gamma$  et appelée le *graphe du recollement* (cf. fig. 7).

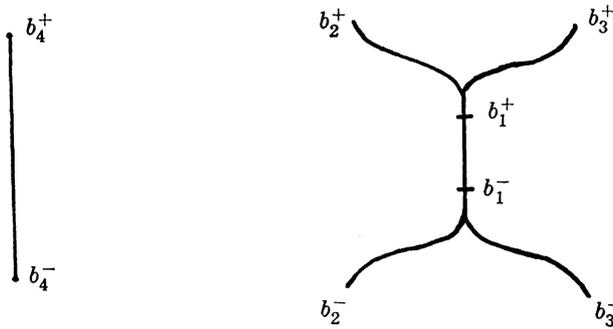


FIGURE 7

Nous noterons  $\widehat{b_i^+ b_i^-}$  l'unique sous-variété de  $\Gamma$ , sans point de branchement, bordée par  $b_i^+$  et  $b_i^-$ . Un tel arc sera dit *minimal* s'il ne contient aucune paire  $(b_j^+, b_j^-)$  en son intérieur.

Si  $\widehat{b_i^+ b_i^-}$  est minimal, on peut faire la somme connexe plongée des disques  $\Delta_i^+$  et  $\Delta_i^-$ ; le résultat de cette opération est de transformer  $\Delta_i^+ \cup \Delta_i^-$  en un cylindre. Le modèle devient alors un modèle de type  $(n - 1, m + 1)$  dont le graphe du recollement est obtenu à partir du précédent en *éclatant*  $\widehat{b_i^+ b_i^-}$

en autant d'exemplaires qu'il y a de branches, autres que  $\widehat{b_i^+ b_i^-}$ , aboutissant à  $b_i^+$  (s'il n'y en a pas, on remplace  $\widehat{b_i^+ b_i^-}$  par l'ensemble vide) (cf. fig. 8).

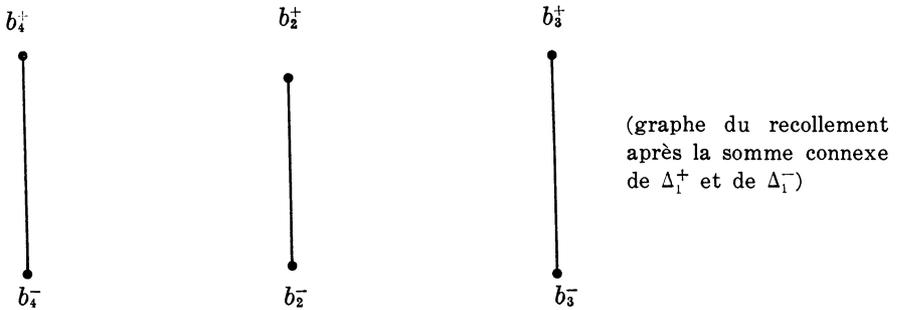


FIGURE 8

L'opération inverse de la précédente est une *coupure*.

(3.3) *Plongement du modèle.*

Soit  $S$  une surface dans une variété  $V$  de dimension 3. Soit  $\varphi: D^2 \times [-1, +1] \rightarrow V$  un plongement transversal sur  $S$ . Si  $\varphi^{-1}(S)$  est un modèle de type  $(n, m)$  avec  $n \geq 1$ , on dira que  $\varphi$  est une *carte de recollement*. En transportant par  $\varphi$  la transformation du modèle décrite en 3.2, on effectue sur  $S$  une opération de recollement de résultat  $S'$ ;  $\varphi: D^2 \times [-1, +1] \rightarrow V$  est une carte de recollement pour  $S'$  et  $\varphi^{-1}(S')$  est un modèle du type  $(n - 1, m + 1)$ . La surface  $\Sigma$  obtenue par itération de ce procédé est le *résultat du recollement de  $S$  par  $\varphi$* ;  $\varphi^{-1}(\Sigma)$  ne contient que des cylindres.

(3.4). *Un théorème d'isotopie.*

(3.4.1). *Définitions.* — Dans  $V$ , un chemin  $\gamma$  joignant deux surfaces  $S_1$  et  $S_2$  est un *bon chemin de jonction* si la somme connexe plongée le long de  $\gamma$  donne une variété plongée; cette variété sera notée  $S_1 \#_\gamma S_2$ .

— Lorsqu'on dira que deux chemins sont homotopes, cela voudra toujours dire qu'ils sont homotopes à extrémités fixes.

**THÉORÈME 3.4.2.** *Soit  $S = \Sigma_1 \cup \dots \cup \Sigma_k$  une réunion de sphères plongées, mutuellement disjointes, dans une variété  $V$  de dimension 3. Soient  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  deux cartes de recollement de  $S$ . On suppose que*

1°) *les deux modèles de recollement sont isomorphes, de type  $(n, m)$ , et les résultats des recollements sont des sphères plongées  $S_1$  et  $S_2$ .*

2°)  *$\varphi_1$  et  $\varphi_2$  coïncident au voisinage des points  $b_1^+, \dots, b_n^+$  et  $b_1^-, \dots, b_n^-$  du modèle.*

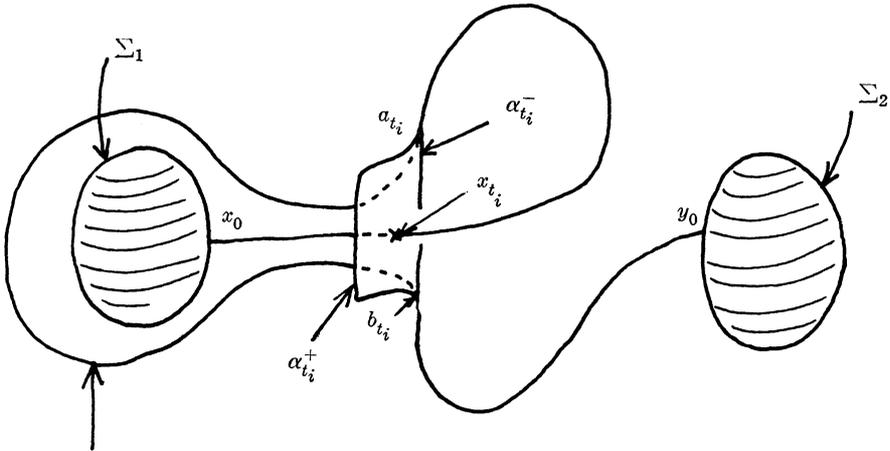
3°) Pour  $i = 1, \dots, n$ ,  $\varphi_1|_{\widehat{b_i^+ b_i^-}}$  et  $\varphi_2|_{\widehat{b_i^+ b_i^-}}$  sont homotopes.  
 Alors  $S_1$  et  $S_2$  sont isotopes.

LEMME 3.4.3. Soient  $\gamma$  et  $\gamma'$  deux bons chemins de jonction entre  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  dans  $V - (\Sigma_3 \cup \dots \cup \Sigma_k)$ . On suppose que  $\gamma$  et  $\gamma'$  coïncident au voisinage de leurs extrémités et qu'ils sont homotopes dans  $V$ . Alors  $\Sigma_1 \#_{\gamma} \Sigma_2$  et  $\Sigma_1 \#_{\gamma'} \Sigma_2$  sont isotopes dans  $V - (\Sigma_3 \cup \dots \cup \Sigma_k)$ .

Démonstration du lemme. Il suffit de prouver que  $\gamma$  et  $\gamma'$  sont isotopes par une isotopie à support dans  $V - (\Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \dots \cup \Sigma_k)$ . Il existe une famille à un paramètre de chemins immergés  $\{\gamma_t | t \in [0, 1]\}$  telle que  $\gamma_0 = \gamma$ ,  $\gamma_1 = \gamma'$  et que, pour tout  $t \in [0, 1]$ ,  $\gamma_t$  ait mêmes extrémités  $x_0$  et  $y_0$  que  $\gamma$ . Génériquement, sauf pour un nombre fini de valeurs du paramètre  $t_1, \dots, t_p$ ,  $\gamma_t$  est plongé et pour les valeurs exceptionnelles  $\gamma_{t_i}$  n'a qu'un point double  $x_{t_i}$ . D'autre part, d'après le théorème de van Kampen, on peut supposer que, pour tout  $t \in [0, 1]$ ,

$$\text{int } \gamma_t \cap (\Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \dots \cup \Sigma_k) = \emptyset .$$

Considérons un petit disque  $\Delta_{t_i}$ , centré au point  $x_{t_i}$  et transversal à l'arc  $(x_0, x_{t_i})$  de  $\gamma_{t_i}$ . Ecrivons  $\partial\Delta_{t_i} = \alpha_{t_i}^- \cup \alpha_{t_i}^+$  avec  $\partial\alpha_{t_i}^- = \partial\alpha_{t_i}^+ = \{a_{t_i}\} \cup \{b_{t_i}\}$  (cf. fig. 9).



Position intermédiaire au cours  
 d'une isotopie de  $\gamma_{t_i-\varepsilon}$  à  $\gamma_{t_i+\varepsilon}$

FIGURE 9

On peut supposer qu'il existe  $\varepsilon > 0$  tel que, pour  $t = t_i - \varepsilon$ ,

$$\gamma_t = (x_0, a_{t_i}) \cup \alpha_{t_i}^- \cup (b_{t_i}, y_0) ,$$

que, pour  $t = t_i + \varepsilon$ ,

$$\gamma_t = (x_0, a_{t_i}) \cup \alpha_{t_i}^+ \cup (b_{t_i}, y_0) ,$$

et que, lorsque  $t$  varie de  $t_i - \varepsilon$  à  $t_i + \varepsilon$ , l'homotopie régulière a pour "support" le disque  $\Delta_{t_i}$ . Or  $\partial\Delta_{t_i}$  borde un autre disque  $\Delta'_{t_i}$  plongé dans le complémentaire de toutes les sphères et dont l'intérieur ne rencontre aucun des chemins  $\gamma_t$ ,  $t \in [t_i - \varepsilon, t_i + \varepsilon]$ . On peut, par exemple, choisir  $\Delta'_{t_i}$  de sorte que  $\Delta'_{t_i} \cup \Delta_{t_i}$  soit une sphère topologique, isotope à  $\Sigma_1$ . Le disque  $\Delta'_{t_i}$  peut alors servir de "support" à une isotopie de  $\gamma_{t_i-\varepsilon}$  à  $\gamma_{t_i+\varepsilon}$ . cqfd.

Ce lemme m'a été donné par Alain Chenciner.

*Démonstration du théorème 3.4.2.* Nous allons faire une démonstration par récurrence sur le nombre  $n$  de recollements du modèle. Le départ de la récurrence est assuré par le lemme 3.4.3. Supposons que l'arc  $\widehat{b_1^+ b_1^-}$  soit minimal sur le graphe du recollement et qu'il permette de recoller  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$ , c'est-à-dire que pour  $i = 1, 2$ ,  $\varphi_i(\Delta_1^+) \subset \Sigma_1$  et  $\varphi_i(\Delta_1^-) \subset \Sigma_2$ , où  $\Delta_1^+$  et  $\Delta_1^-$  sont les disques du modèle décrit en (3.1). D'après le lemme 3.4.3, il existe un difféomorphisme  $H: V \rightarrow V$ , isotope à l'identité par une isotopie triviale sur  $S$ , et tel que

$$H(\Sigma_1 \#_{\varphi_1(\widehat{b_1^+ b_1^-})} \Sigma_2) = \Sigma_1 \#_{\varphi_2(\widehat{b_1^+ b_1^-})} \Sigma_2 .$$

Notons  $S' = (\Sigma_1 \#_{\varphi_2(\widehat{b_1^+ b_1^-})} \Sigma_2) \cup \Sigma_3 \cup \dots \cup \Sigma_k$ . On voit que  $H\varphi_1$  et  $\varphi_2$  sont deux cartes de recollement de  $S'$ , à  $n - 1$  recollements et satisfaisant à toutes les conditions du théorème 3.4.2. Par hypothèse de récurrence, les résultats des recollements  $S'_1$  et  $S'_2 = S_2$  sont donc isotopes. D'autre part, on a évidemment  $S'_1 = H(S_1)$ . Donc  $S_1$  et  $S_2$  sont bien isotopes. Le théorème 3.4.3 est donc démontré.

#### 4. Démonstration du théorème de disjonction (théorème II)

(4.1) Dans tout ce paragraphe, sauf mention contraire,  $V$  est une variété de dimension 3 satisfaisant à la conjecture de Poincaré. Soit  $f: S^2 \rightarrow V$  un plongement transversal sur la sphère  $S$  donnée dans  $V$  et supposée non homotope à zéro (cf. §1 Remarque). Par hypothèse  $f$  est homotope à une application  $S^2 \rightarrow V - S$ . Si nous prouvons que, sous ces hypothèses, il existe une isotopie de  $f$  à  $f'$ , où  $f'^{-1}(S)$  a moins de composantes que  $f^{-1}(S)$ , alors, par récurrence sur  $\text{card } \pi_0(f^{-1}(S))$ , nous aurons la démonstration du théorème de disjonction.

D'après le corollaire 2.6.5, on est assuré de l'un ou l'autre des faits suivants (les notations sont celles du paragraphe 2):

(H1) Il existe deux courbes  $C$  et  $C'$  de  $f^{-1}(S)$  telles que la coalescence des arêtes  $A(C)$  et  $A(C')$  du graphe  $\Gamma(f)$  soit admissible.

(H2) Il existe une courbe  $C$  de  $f^{-1}(S)$  telle que l'effondrement de l'arête  $A(C)$

du graphe  $\Gamma(f)$  soit admissible.

Dans l'un et l'autre cas l'homotopie élémentaire qui réalise l'opération formelle ne peut en général pas être remplacée par une isotopie élémentaire, mais le théorème 4.2 est suffisant pour prouver le théorème de disjonction, selon ce qu'on vient de dire en (4.1).

**THÉORÈME 4.2.** *Soit  $f: S^2 \rightarrow V$  un plongement transversal sur  $S$ . On suppose (H1) ou (H2); si on suppose (H1), il n'est pas nécessaire que  $V$  satisfasse à la conjecture de Poincaré. Alors  $f$  est isotope à un plongement  $f': S^2 \rightarrow V$  transversal sur  $S$  et tel que*

$$\text{card } \pi_0(f'^{-1}(S)) < \text{card } \pi_0(f^{-1}(S)) .$$

(4.3) *Démonstration du théorème 4.2 sous l'hypothèse (H1).*

Notons  $S'$  l'image du plongement  $f$ . Par hypothèse, il existe deux courbes  $C$  et  $C'$  de l'intersection  $S' \cap S$ , un chemin  $\gamma'$  joignant  $C$  à  $C'$  dans  $S'$ , un chemin  $\gamma$  joignant dans  $S$  les extrémités de  $\gamma'$ , et un 2-disque singulier  $\Delta$  dans  $V$  tels que

- $\text{int } \gamma' \cap S = \emptyset$ ,
- $\partial\Delta = \gamma \cup \gamma'$ ,
- $\text{int } \Delta \cap S = \emptyset$ ,
- $\Delta$  est transversal sur  $S$  le long de  $\gamma$ .

On peut évidemment imposer en plus que  $\gamma$  et  $\gamma'$  soient plongés; de plus, puisqu'on ne cherche pas à ce que  $\Delta$  soit immergé, on peut aussi imposer que  $\Delta$  soit transversal sur  $S'$  le long de  $\gamma'$  et, à partir de là, que  $\text{int } \Delta$  soit transversal sur  $S'$ . Alors  $\Delta \cap S'$  est constitué de courbes fermées et de courbes non fermées dont les extrémités se trouvent sur  $\gamma$ . Soit  $\gamma'_1$  une telle composante et soit  $\gamma_1$  le sous-arc de  $\gamma$  qui a les mêmes extrémités  $(a_1, b_1)$  que  $\gamma'_1$  (cf. fig. 10).

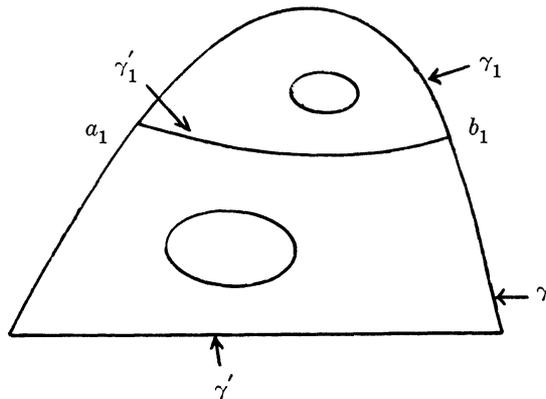


FIGURE 10

Deux cas se présentent:

*1er cas:*  $a_1$  et  $b_1$  appartiennent à la même composante de  $S \cap S'$  (cf. fig. 11)

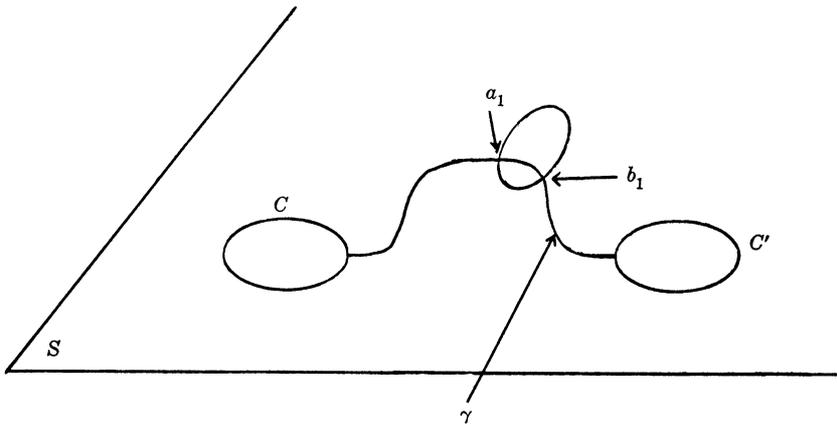


FIGURE 11

Dans ce cas, on peut faire une isotopie de  $\gamma$  sur  $S$  pour éliminer la paire  $(a_1, b_1)$  dans l'intersection de  $\text{int } \gamma$  avec  $S \cap S'$ . Si l'on prolonge cette isotopie à  $V$ , on remplace alors la composante non fermée  $\gamma'_1$  de  $\Delta \cap S'$  par une composante fermée.

*2<sup>me</sup> cas:*  $a_1$  et  $b_1$  appartiennent à des courbes distinctes  $C_1$  et  $C'_1$  de  $S \cap S'$ . Dans ce cas, j'affirme que la coalescence des arêtes  $A(C_1)$  et  $A(C'_1)$  est admissible. Il faut s'apercevoir d'abord que  $A(C_1)$  et  $A(C'_1)$  ont un sommet commun: cela vient de ce que  $\text{int } \gamma'_1 \cap S = \emptyset$ , puisque  $\text{int } \Delta \cap S = \emptyset$ . Enfin,  $\gamma'_1$  représente évidemment 0 dans  $\pi_1(V, S)$ ; on applique alors la proposition 2.5.

Grâce à ce raisonnement, on se ramène à la situation suivante: il existe deux courbes  $C$  et  $C'$  dans  $S \cap S'$ , jointes dans  $S$  (resp. dans  $S'$ ) par un chemin plongé  $\gamma$  (resp.  $\gamma'$ ) tels que

- $\text{int } \gamma \cap S' = \emptyset$  et  $\text{int } \gamma' \cap S = \emptyset$
- $\gamma \cup \gamma'$  borde un disque singulier  $\Delta$  transversal sur  $S \cup S'$  et tel que  $\text{int } \Delta \cap S = \emptyset$ .

Dans le cas particulier où  $C$  et  $C'$  sont en *bonne position*, c'est-à-dire qu'en plus des conditions précédentes  $\Delta$  peut-être choisi plongé avec  $\text{int } \Delta \cap (S \cup S') = \emptyset$ , il existe un modèle permettant de réaliser la somme connexe de  $C$  et de  $C'$  par une isotopie de  $S'$  (voir par exemple Wells [5]). Le théorème 4.2, sous l'hypothèse (H1), découle donc du lemme suivant:

**LEMME 4.3.1.** *Il existe une sphère plongée  $S'_1$ , isotope à  $S'$ , telle que*

$S'_1 \cap S = S' \cap S$  et que, pour la paire  $(S, S'_1)$ , les courbes  $C$  et  $C'$  soient en bonne position.

*Preuve.* Coupons la sphère  $S'$  par le disque que  $C$  borde dans  $S$  et qui ne contient pas  $C'$ . De façon précise, il existe une réunion de sphères disjointes  $\Sigma$  plongée dans  $V$  et une carte de recollement de  $\Sigma$ ,  $\varphi: D^2 \times [-1, +1] \rightarrow V$ , vérifiant:

- 1°) le résultat du recollement de  $\Sigma$  par  $\varphi$  est  $S'$ ,
- 2°)  $\varphi^{-1}(S) = D^2 \times \{0\}$  et  $\varphi^{-1}(C') = \emptyset$ ,
- 3°) soient  $(x, y, t)$  les coordonnées cartésiennes de  $D^2 \times [-1, +1]$ ; alors  $\varphi^{-1}(C) = \{(x, y, t) \in D^2 \times [-1, +1] \mid t = 0, x^2 + y^2 = 1/2\}$  et  $\{(x, y, t) \in D^2 \times [-1, +1] \mid 1/2 < x^2 + y^2 \leq 1\}$  ne rencontre pas  $\varphi^{-1}(S')$ ,
- 4°)  $\varphi^{-1}(\Sigma)$  ne contient que des disques, ou encore  $\text{int}(\text{Im } \varphi) \cap \Sigma \cap S = \emptyset$ .
- 5°)  $\varphi^{-1}(\Delta) = \{(x, y, t) \in D^2 \times [-1, +1] \mid y = 0, 1/2 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq 1\}$ .

D'autre part, il existe sur  $\Delta$  un voisinage collier  $U$  de son bord, qui est plongé dans  $V$  tel que  $U \cap S' = \gamma'$  et  $U \cap S = \gamma$ . On peut supposer que  $\varphi^{-1}(U) = \varphi^{-1}(\Delta)$ . Dans  $U$  on choisit un disque  $\Delta_1$  dont les propriétés sont mises en évidence sur les figures 12 et 13.

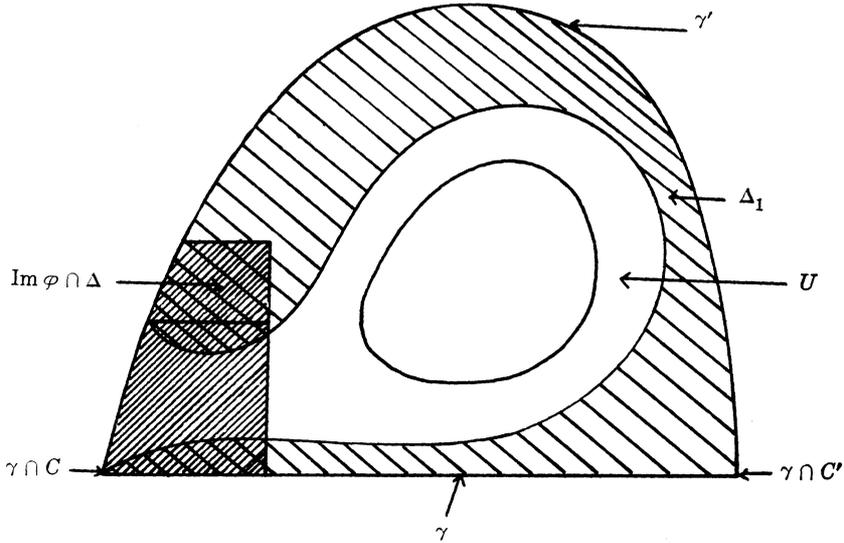


Figure dans  $\Delta$

FIGURE 12.

Il existe alors, pour la sphère  $\Sigma$ , une nouvelle carte de recollement  $\varphi_1: D^2 \times [-1, +1] \rightarrow V$  de même modèle que  $\varphi$ , telle que

- (i)  $\varphi_1^{-1}(\Delta_1) = \varphi^{-1}(\Delta)$ ,

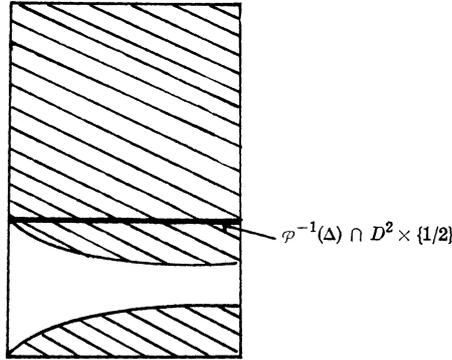


Figure dans  $\varphi^{-1}(\Delta)$ ; la partie hachurée représente  $\varphi^{-1}(\Delta_1)$

FIGURE 13.

(ii)  $\varphi_1^{-1}(S) = D^2 \times \{0\}$ ,

(iii)  $\varphi$  et  $\varphi_1$  coïncident sur  $D^2 \times ([-1, 0] \cup [1/2, 1])$ .

La sphère cherchée  $S'_1$  est le résultat du recollement de  $\Sigma$  par  $\varphi_1$ . Les conditions du théorème 3.4.2 étant satisfaites,  $S'_1$  est isotope à  $S'$ .

Enfin, d'après (ii) et (iii)  $S'_1 \cap S = S' \cap S$  et d'après (i)  $\text{int } \Delta_1 \cap S'_1 = \emptyset$ . Pour la paire  $(S, S'_1)$ , les courbes d'intersection  $C$  et  $C'$  sont en bonne position puisque le disque  $\Delta_1$  vérifie toutes les conditions requises. cqfd.

(4.4) *Démonstration du théorème 4.2 sous l'hypothèse (H2).*

(4.4.1) Comme en 4.3,  $S'$  désigne l'image du plongement  $f$ .  $D'$  après la proposition 2.4.1, l'hypothèse (H2) peut être écrite sous la forme suivante: il existe sur  $S'$  un disque  $D'$ , dont le bord est  $C$ , qui ne rencontre pas  $S$  en son intérieur, et qui représente 0 dans  $\tilde{\pi}_2(V, S)$ .

Soient  $D_1$  et  $D_2$  les deux disques bordés par  $C$  dans  $S$ . On condère les deux sphères à arête anguleuse  $\Sigma_1 = D' \cup D_1$  et  $\Sigma_2 = D' \cup D_2$ . Dans  $\pi_2(V)$ , on a les relations suivantes, dans lesquelles les signes ne sont pas fixés faute d'avoir choisi les orientations:

$$\begin{aligned} [\Sigma_2] &= [\Sigma_1] \pm [S] \\ [\Sigma_1] &= n_1 [S], \quad n_1 \in \mathbf{Z} \\ [\Sigma_2] &= n_2 [S], \quad n_2 \in \mathbf{Z} . \end{aligned}$$

D'autre part les sphères  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  sont plongées car  $\text{int } D' \cap S = \emptyset$ , et isotopes à des sphères lisses disjointes de  $S$  (arrondir et pousser suivant les normales à  $S$  du côté de  $D'$ ). Il résulte alors du lemme 4.4.2 ci-dessous que  $|n_1|, |n_2| \in \{0, 1\}$ . Les relations précédentes impliquent donc que l'un des deux entiers, disons  $n_1$ , soit nul, c'est-à-dire que  $\Sigma_1$  soit homotope à zéro. Or  $V$  satisfait à la conjecture de Poincaré, donc  $\Sigma_1$  borde dans  $V$  une boule  $B$  à

bord anguleux.

Si l'arête est rentrante,  $D'$  étant minimal,  $S$  est entièrement contenu dans  $B$ , donc homotope à zéro (cas trivial que nous avons écarté).

Si l'arête est saillante, on a un modèle d'élimination de la courbe  $C$  par une isotopie de  $S'$ . On élimine d'ailleurs aussi toutes les courbes de  $S' \cap S$  intérieures à  $D_1$ , (cf. fig. 14). cqfd.

**LEMME 4.4.2.** Soient  $S$  et  $\Sigma$  deux sphères plongées disjointes dans une variété  $V$  de dimension 3. On suppose que ni  $S$  ni  $\Sigma$  n'est homotope à zéro. Soit une homotopie  $h: S^2 \times [0, 1] \rightarrow V$  telle que  $h|_{S^2 \times \{0\}}: S^2 \rightarrow \Sigma$  soit de degré 1 et  $h|_{S^2 \times \{1\}}: S^2 \rightarrow S$  soit de degré  $n$  ( $n$  est nécessairement non nul). Alors  $|n| = 1$ .

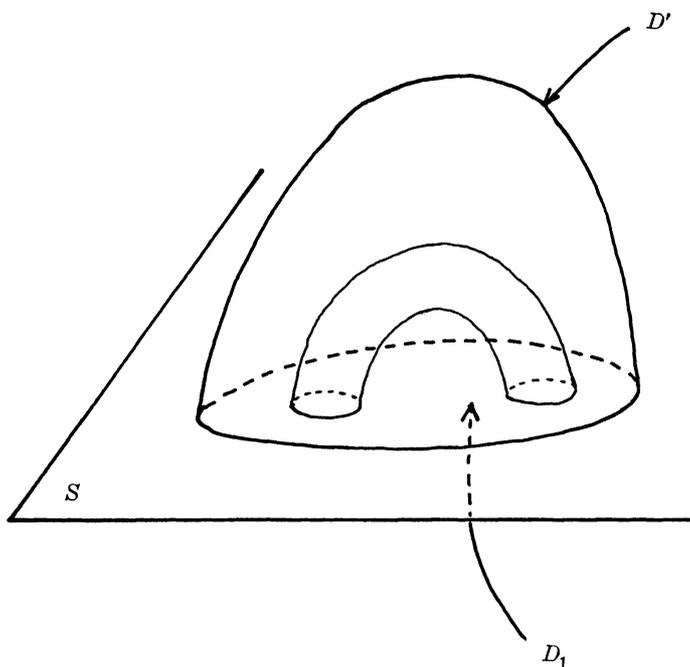


FIGURE 14

*Démonstration.* En relevant la situation dans un revêtement universel, on peut supposer que  $V$  est 1-connexe et ouverte et que ni  $S$  ni  $\Sigma$  ne bordent une variété compacte. Pour prouver le lemme, il suffit maintenant de prouver que  $S$  est homologue à  $\Sigma$  et que  $[S]$  est d'ordre infini dans  $H_2(V)^*$ . Il existe un plongement propre  $\varphi: \mathbf{R} \rightarrow V$  coupant  $S$  en un seul point; donc  $[S]$  est d'ordre infini. Si  $\Sigma$  n'est pas homologue à  $S$ , on peut choisir  $\varphi$  ne rencon-

\* D'après Specker, on sait que  $H_2(V)$  est libre; mais, comme me l'a indiqué Poenaru, cet argument particulier à la dimension 3 n'a pas à être invoqué.

trant pas  $\Sigma$ , ce qui interdit la relation  $[\Sigma] = n[S]$ ,  $n \neq 0$ . cqfd.

**5. Démonstration du théorème III**

Ici  $V = \#_p S^1 \times S^2$  et  $H$  est un difféomorphisme de  $V$  homotope à l'identité. Notons  $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_p$  les  $p$  sphères transverses aux anses d'indice 1. La démonstration se décompose en quatre lemmes.

**LEMME 5.1.**  *$H$  est isotope à  $H'$  tel que, pour tout  $i = 1, 2, \dots, p$ ,  $H'(\Sigma_i) = \Sigma_i$ .*

*Démonstration.* Pour une démonstration par récurrence, supposons que  $H(\Sigma_i) = \Sigma_i$  pour  $i = 1, 2, \dots, i_0 - 1$ . Il faut démontrer que  $H(\Sigma_{i_0})$  est isotope à  $\Sigma_{i_0}$  par une isotopie triviale sur  $\Sigma_1 \cup \dots \cup \Sigma_{i_0-1}$ . Puisque  $\#_p S^1 \times S^2$  satisfait à la conjecture de Poincaré, il suffit, d'après le théorème I, de prouver que  $\Sigma_{i_0}$  et  $H(\Sigma_{i_0})$  sont homotopes dans  $V - (\Sigma_1 \cup \dots \cup \Sigma_{i_0-1})$ . Or elles sont homotopes dans  $V$ . Pour trouver à partir de là, une homotopie dans  $V - (\Sigma_1 \cup \dots \cup \Sigma_{i_0-1})$ , on utilise le lemme 2.4.2 comme dans la démonstration de 2.4.1: soit  $h: S^2 \times [0, 1] \rightarrow V$  une homotopie générique de  $\Sigma_{i_0}$  à  $H(\Sigma_{i_0})$ ; pour pouvoir appliquer 2.4.2, il faut être sûr que  $h^{-1}(\Sigma_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, i_0 - 1$ , ne sépare pas  $S^2 \times \{0\}$  de  $S^2 \times \{1\}$ ; or si elle séparait, alors  $\Sigma_{i_0}$  serait homologue à un multiple de la classe de  $\Sigma_i$ , ce qui n'est évidemment pas le cas.

**LEMME 5.2.** *Si, pour tout  $i = 1, 2, \dots, p$ ,  $H(\Sigma_i) = \Sigma_i$ , alors  $H$  est isotope à  $H'$  tel que  $H'|\Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \dots \cup \Sigma_p$  soit l'identité.*

*Démonstration.* Il suffit de voir que  $H$  conserve l'orientation des sphères  $\Sigma_i$ . Si ce n'était pas le cas,  $H$  n'induirait pas l'identité en homologie et ne serait donc pas homotope à l'identité.

(5.3) *Difféomorphisme de rotation parallèlement à une sphère.*

Soit  $\alpha: (S^1, 0) \rightarrow (SO(3), \text{Id})$ . Il lui correspond un difféomorphisme  $G(\alpha)$  de  $S^2 \times [0, 1]$ , qui, à  $(x, \theta) \in S^2 \times [0, 1]$ , associe  $G(\alpha)(x, \theta) = (\alpha(\theta).x, \theta)$ .

Soient  $V$  une variété de dimension 3 orientée et  $\Sigma$  une 2-sphère orientée dans  $V$ . Soit  $\varphi: S^2 \times [0, 1] \rightarrow V$  un plongement conservant l'orientation et tel que  $\varphi(S^2 \times \{0\}) = \Sigma$ . Puisque  $G(\alpha)$  est l'identité sur  $\partial(S^2 \times [0, 1])$ , on peut définir un difféomorphisme  $H_\Sigma(\alpha): V \rightarrow V$ , qui est l'identité sur  $\Sigma$ , par la formule:

$$H_\Sigma(\alpha)|V - \text{Im } \varphi = \text{Identité}$$

$$H_\Sigma(\alpha)|\text{Im } \varphi = \varphi G(\alpha)\varphi^{-1}.$$

Nous dirons que  $H_\Sigma(\alpha)$  est un difféomorphisme de rotation parallèlement à  $\Sigma$ . La classe d'isotopie de  $H_\Sigma(\alpha)$  ne dépend que de la classe d'homotopie de  $\alpha$  et de la classe d'isotopie de  $\Sigma$ . On peut choisir son support dans un voisinage

arbitrairement petit de  $\Sigma$ ; dans le cas où  $V = \#_p S^1 \times S^2$  et où  $\Sigma = \Sigma_i$ , on peut prendre  $H_{\Sigma_i}(\alpha)$  égal à l'identité sur  $\Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \dots \cup \Sigma_p$ , et  $H_{\Sigma_i}(\alpha)$  commute avec  $H_{\Sigma_j}(\beta)$  si  $j \neq i$ .

**LEMME 5.4.** *Soit  $H$  un difféomorphisme de  $V = \#_p S^1 \times S^2$ , égal à l'identité sur  $\Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \dots \cup \Sigma_p$  et conservant l'orientation. Alors il existe, pour tout  $i \in \{1, \dots, p\}$ ,  $\alpha_i: S^1 \rightarrow SO(3)$ , tel que  $H$  soit isotope à  $H_{\Sigma_p}(\alpha_p) \circ \dots \circ H_{\Sigma_1}(\alpha_1)$ , par une isotopie triviale sur  $\Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \dots \cup \Sigma_p$ .*

*Démonstration.* Lorsqu'on coupe  $V$  le long de toutes les sphères  $\Sigma_i$ , on obtient un difféomorphisme  $F$  de  $D(2p - 1) = D^3 - (2p - 1)$  disques, qui est l'identité sur le bord. Avec les théorèmes de Cerf (théorèmes de fibration et  $\pi_0(\text{Diff } D^3) = 0$ ) on prouve que tout difféomorphisme de  $D(2p - 1)$ , qui laisse invariante toutes les composantes du bord, est isotope à l'identité. De là on déduit qu'à travers les difféomorphismes qui sont l'identité sur le bord  $F$  est isotope à un produit de difféomorphismes de rotation parallèlement à chaque sphère du bord de  $D(2p - 1)$ . En recollant deux à deux les composantes de  $\partial D(2p - 1)$ , on reconstitue  $V$  et on voit que  $H$  est isotope à un produit de difféomorphismes de rotation parallèlement à chaque sphère  $\Sigma_i$ .

cqfd.

Si toutes les applications  $\alpha_i: S^1 \rightarrow SO(3)$  sont homotopes à zéro, il est clair que  $H_{\Sigma_p}(\alpha_p) \circ \dots \circ H_{\Sigma_1}(\alpha_1)$  est isotope à l'identité. Pour prouver le théorème III, il suffit maintenant de prouver le lemme suivant:

**LEMME 5.5.** *Si  $H = H_{\Sigma_p}(\alpha_p) \circ \dots \circ H_{\Sigma_1}(\alpha_1)$  est homotope à l'identité, alors  $\alpha_1$  est homotope à zéro.*

*Démonstration.* Il existe une projection naturelle  $\rho: V \rightarrow S^2$ , qui est un difféomorphisme de  $\Sigma_1$  sur  $S^2$ , qui est transversale sur le pôle nord  $N$  de  $S^2$  et telle que

—  $\rho^{-1}(N)$  soit le cercle canonique  $C$  qui coupe  $\Sigma_1$  transversalement et en un seul point,

—  $\rho$  définisse sur  $\nu(C, V)$  la trivialisat ion canonique.\*

Définissons  $\hat{H}: V \times \mathbf{R} \rightarrow S^2 \times \mathbf{R}$  par  $\hat{H}(x, t) = (\rho H(x), t)$ .  $\hat{H}$  est transversal sur  $(N, O)$ . Comme on peut, sans perdre de généralité, supposer que  $\alpha_1: S^1 \rightarrow SO(3)$  a son image dans  $SO(2)$ , alors  $\hat{H}^{-1}(N, O) = C \times \{0\}$ ; la trivialisat ion  $T_1$  induite par  $\hat{H}$  sur  $\nu(C \times \{0\}, V \times \mathbf{R})$  se déduit, à homotopie près, de la trivialisat ion canonique  $T_0$  par l'action de  $\alpha_1$ . Si  $H$  est homotope à l'identité, il existe alors une application propre  $\Lambda: V \times \mathbf{R} \times [0, 1] \rightarrow S^2 \times \mathbf{R}$  transversale sur  $(N, O)$ , telle que  $\Lambda|_{V \times \mathbf{R} \times \{1\}} = H$  et  $\Lambda(x, t, 0) =$

\*  $\nu$  désigne le fibré normal.

$(\rho(x), t)$ . Notons  $S = \Lambda^{-1}(N, O)$ ,  $C_0 = C \times \{0\} \times \{0\}$ ,  $C_1 = C \times \{0\} \times \{1\}$ . On a  $\partial S = C_0 \cup C_1$ .

L'application  $\Lambda$  induit sur  $\nu(S, V \times \mathbf{R} \times [0, 1])$  une trivialisatation dont la restriction à  $C_0$  est  $T_0$  et dont la restriction à  $C_1$  est  $T_1$ . Or  $S$  a le type d'homotopie d'un bouquet de cercles

$$\gamma_1 \vee \gamma'_1 \vee \gamma_2 \vee \gamma'_2 \vee \cdots \vee \gamma_g \vee \gamma'_g \vee C_0$$

et, dans  $\pi_1(S)$ , avec des orientations convenables de tous ces cercles, on a

$$[C_1] = [[\gamma_1], [\gamma'_1]] \cdot [[\gamma_2], [\gamma'_2]] \cdots [[\gamma_g], [\gamma'_g]] \cdot [C_0]$$

où  $[[\gamma], [\gamma']]$  désigne le commutateur des classes  $[\gamma]$  et  $[\gamma']$ . Puisque  $\pi_1(SO(3))$  est abélien, toutes les trivialisations de  $\nu(S, V \times \mathbf{R} \times [0, 1])$ , dont la restriction à  $C_0$  est homotope à  $T_0$ , coïncident à homotopie près sur  $C_1$ . Pour prouver lemme, il suffit donc de trouver une trivialisatation de  $\nu(S, V \times \mathbf{R} \times [0, 1])$  dont la restriction à  $C_0$  et à  $C_1$  soit la trivialisatation canonique.

Considérons  $S$  comme une surface dans  $V \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ ; en lui attachant des disques le long de  $C_0$  et de  $C_1$  on en fait une surface fermée  $\hat{S}$  dans  $V \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ . Il s'agit de montrer que  $\nu(\hat{S}; V \times \mathbf{R} \times \mathbf{R})$  est trivial; il suffit même de démontrer qu'il est stablement trivial puisque c'est un fibré de dimension plus grande que celle de sa base. Or le fibré normal à une variété stablement parallélisable dans une variété stablement parallélisable est stablement trivial. cqfd.

UNIVERSITÉ PARIS XI (ORSAY) ET  
CENTRE DE MATHÉMATIQUES DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

#### RÉFÉRENCES

- [ 1 ] J. CERF, Sur les difféomorphismes de la sphère de dimension trois ( $\Gamma_4 = 0$ ), Lect. Notes in Math. n° 53, Springer, 1968.
- [ 2 ] H. GLUCK, *The embedding of two-spheres in four-spheres*, Bull. Amer. Math. Soc. **67** (1961), 586-589.
- [ 3 ] E. SPECKER, *Die erste cohomologiegruppe von Überlagerungen und Homotopie-Eigenschaften dreidimensionaler Mannigfaltigkeiten*. Comment. Math. Helv. **23** (1949), 303-333.
- [ 4 ] F. WALDHAUSEN, *On irreducible 3-manifolds which are sufficiently large*, Ann. of Math. **87** (1968), 56-88.
- [ 5 ] R. WELLS, *Modifying intersections*, III. J. Math. **11** (1967), 389-403.

(Received December 2, 1971)