MAT2410 : TRAVAUX PRATIQUES 5

Problème 1. * Soit $\omega = 3e_1^* \wedge e_3^* - 2e_2^* \wedge e_3^* \in \Lambda^2(\mathbb{R}^5)$. Trouvez $*\omega$.

Problème 2. Démontrez qu'un vecteur $v \in \mathbb{R}^n$ est nul si et seulement si pour toute 1-forme extérieure $\omega \in \Lambda^1(\mathbb{R}^n)$ on a $\omega(v) = 0$.

Problème 3. Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et soit $\theta\colon V \times V \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire et anti-symétrique. On dit que θ est non-dégénerée si $\theta(v, w) = 0$ pour tout w si et seulement si $v = 0$. Montrez que θ est non-dégénerée si et seulement si sa "adjointe"

$$\begin{array}{rcl} \theta\colon V & \to & V^* \\ v & \mapsto & (w \mapsto \theta(v, w)) \end{array}$$

est un isomorphisme.

Problème 4. * Utilisez l'exercice précédent pour démontrer que pour deux 1-formes quelconques $\alpha_1, \alpha_2 \in \Lambda^1(\mathbb{R}^n))$, on a :

$$\alpha_1 \wedge \alpha_2 = 0 \ \text{ dans } \Lambda^2(\mathbb{R}^n) \quad \Longleftrightarrow \quad \exists\, c \in \mathbb{R} \mid \alpha_2 = c\ \alpha_1.$$

Problème 5. Démontrez que tout élément $\omega \in \Lambda^2(\mathbb{R}^3)$ est pur : il existe $\alpha_1, \alpha_2 \in \Lambda^1(\mathbb{R}^3)$ telles que $\omega = \alpha_1 \wedge \alpha_2$.

Problème 6. * Démontrez qu'un élément $\omega \in \Lambda^2(\mathbb{R}^4)$ tel que $\omega \wedge \omega = 0$ est forcément pur.

Problème 7. Montrez que

$$\mathcal{B} = \{e_{i_1}^* \wedge e_{i_2}^* \wedge \cdots \wedge e_{i_k}^* \mid 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n\}$$

est un base de $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$.