MAT2410 : TRAVAUX PRATIQUES 4

Problème 1. Soit $\omega = 4e_1^* + 2e_2^* - e_3^* \in \Lambda^1(\mathbb{R}^3)$, et soit $v = 2e_1 + e_2 - 2e_3$. Compute $\omega(v)$.

Problème 2. Soit $\omega_1 = 4e_1^* + 2e_2^* - e_3^*$ et soit $\omega_2 = e_1^* + 3e_3^*$. Calculez : (a) $\omega_1 \wedge \omega_2(e_1, e_2)$; (b) $\omega_1 \wedge \omega_2(e_2, e_1)$ (c) $\omega_2 \wedge \omega_1(e_1, e_2)$; (d) $\omega_2 \wedge \omega_1(e_2, e_1)$; (e) $\omega_2 \wedge \omega_2(e_1, e_2)$; (f) $\omega_1 \wedge \omega_2(e_1, e_1)$; (g) $\omega_1 \wedge \omega_1(e_2, e_1)$; and (h) $\omega_1 \wedge \omega_2(v_1, v_2)$ where $v_1 = 3e_2 + e_2$ and $e_1 - e_2 - 4e_3$.

Problème 3. Dans le repère $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ de $\mathbb{R}^3$, étant donné deux vecteurs $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$ et $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$ de $\mathbb{R}^3$, on définit le *produit vectoriel* comme le vecteur de $\mathbb{R}^3$ donné par

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}.$$

(i) Démontrez que l'on a $\mathbf{v} \times \mathbf{u} = -\ \mathbf{u} \times \mathbf{v}$.
(ii) Démontrez que l'on a $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ linéairement indépendants si et seulement si $\mathbf{u} \times \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$.
(iii) Démontrez que le vecteur $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ est orthogonal au plan engendré par $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$.
(iv) Démontrez que $||\mathbf{u} \times \mathbf{v}|| = ||\mathbf{u}||\ ||\mathbf{v}||\ |\sin\theta|$, où θ est l'angle entre $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$.

Problème 4. On appelle *produit triple* de trois vecteurs $\{\mathbf{w}, \mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ le réel

$$\mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \begin{vmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}.$$

(i) Démontrez que $\{\mathbf{w}, \mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ sont coplanaires si et seulement si $\mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 0$.
(ii) Démontrez que l'on a les identités suivantes
$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \mathbf{v} \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{u}) = \mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = -\mathbf{u} \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{v}) = -\mathbf{w} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{u}) = -\mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{w})$.

Problème 5. * Interprétez la quantité $||\mathbf{u} \times \mathbf{v}||$ comme l'aire du parallélogramme de $\mathbb{R}^3$ de base $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$. Démontrez alors que le volume du parallélipipède de côtés $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ et $\mathbf{w}$ est donné par $|\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})|$.

Problème 6. Démontrez que $\chi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dérivable et d'inverse continue sur son image définit une surface plongée dans $\mathbb{R}^3$ si et seulement si en chaque point $p \in \mathbb{R}^2$ on a

$$\left|\left|\frac{\partial \chi}{\partial x}(p) \times \frac{\partial \chi}{\partial y}(p)\right|\right| \neq 0.$$

Problème 7. Soit $\gamma\colon [a,b] \to \Sigma$ une courbe régulière sur une surface Σ que l'on suppose entièrement contenue dans une système de coordonnées $\chi(\mathcal{U}_0) \subset \Sigma$. Montrez qu'il existe une unique paire de fonctions lisses

$$a_1\colon [a,b] \to \mathbb{R}\ ,\ \ a_2\colon [a,b] \to \mathbb{R}$$

telles que $\gamma(t) = \chi(a_1(t), a_2(t))\ \forall t \in [a,b]$.

Problème 8. Etant donné deux courbes régulières et simples $\alpha, \beta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, on appelle *surface réglée* la surface Σ donnée par la paramétrisation $\chi(x,y) = \alpha(x) + \beta(x)y$.
Montrez explicitement que le cylindre unité dans $\mathbb{R}^3$ est une surface réglée qui est plongée dans $\mathbb{R}^3$.

Problème 9. *

(a) Démontrez que pour $R > r > 0$ des réels donnés, l'application

$$\chi(u,v) = ((R + r\cos u)\cos v, (R + r\cos u)\sin v, r\sin u),\ 0 \leq u, v \leq 2\pi,$$

définit une surface Σ plongée de $\mathbb{R}^3$. Reconnaissez-vous cette surface ?

(b) Trouver un vecteur normale en $\chi(u_0, v_0)$.

(c) Quel est le nombre minimum des systèmes des coordonées, qu'il faut avoir, afin de couvrir Σ avec ensembles ouverts. Décrivez-les.

(d) Soit $(u(t), v(t)) = (2t, 3t)$, et $\gamma(t) = \chi(u(t), v(t))$, $t \in \mathbb{R}$. Fait un dessin de l'image de γ.