MAT2410 : TRAVAUX PRATIQUES 9

Problème 1. * Soit c une courbe lisse quelconque de $\mathbb{R}^3$ allant de $(0,0,0)$ à $(1,1,1)$. Calculez $\int\limits_c y^2z^2\ dx + 2xyz^2\ dy + 2xy^2z\ dz$.

Problème 2. * Calculez $\int\limits_c \omega$ lorsque c décrit le demi-cercle supérieur dans $\mathbb{R}^2$ parcouru dans le sens horaire et $\omega = (x^2+y)\ dx + (x-y^2)\ dy$. (Indice : $d\omega = 0$ et utilisez adéquatement Stokes)

Problème 3. * En utilisant le Théorème de Green, calculez l'aire de la région contenue à l'intérieur de l'hypocycloïde définie par $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$. (Indice : coordonnées polaires ! Réponse : $3\pi a^2/8$).

Problème 4. Démontrez l'identité suivante :

$$\int\limits_{\partial D} \phi \nabla \phi \cdot \mathbf{n}\ ds = \int\limits_D (\phi \nabla^2 \phi + \nabla \phi \cdot \nabla \phi) dA.$$

Problème 5. * Montrez que l'on peut toujours reparamétrer un k-cube singulier

$$c\colon [a_1, b_1] \times ... \times [a_k, b_k] \to \mathbb{R}^n,$$

pour obtenir un k-cube singulier de $[0,1]^k$ vers $\mathbb{R}^n$.

Problème 6. La définition du bord d'une k-chaine singulière c a été exprimée comme une somme de $2k$ $k-1$-cubes singuliers

$$\partial c = \sum_{i=1}^{2k} a_i c_i.$$

Montrez que l'on a alors

$$\sum_{i=1}^{2k} a_i = 0.$$

Déduisez de ce qui précède que le 1-cycle $c = c(t) = (\cos t, \sin t)$ ne peut consitituer, à lui seul, un bord de 2-chaîne dans $\mathbb{R}^2$: $\nexists b$ 2-chaîne dans $\mathbb{R}^2$ | $\partial b = c$.

Problème 7. On considère la 1-forme différentielle

$$\alpha = \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2} \in \Omega^1(\mathbb{R}^2 - \{O\}).$$

(i) Montrez que l'on a $\alpha = \xi d\eta - \eta d\xi$ pour les fonctions

$$\xi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \qquad \text{et} \qquad \eta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

(ii) Si $c\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2 - \{O\}$ est une courbe lisse, on considère la courbe $c(t)/||c(t)||$ qui se déplace sur le cercle unité. Si $f(t)$ et $g(t)$ sont les composantes respectivement en x et y de cette nouvelle courbe, montrez que l'on a $f = c^*\xi$, $g = c^*\eta$ et que $f(t)^2 + g(t)^2 = 1$ pour tout $t \in [0,1]$.

(iii) Prenons θ_0 tel que $\cos\theta_0 = \xi(c(0))$ et $\sin\theta_0 = \eta(c(0))$. On définit

$$\theta(t) = \theta_0 + \int_{[0,t]} c^*\alpha.$$

Montrez que $\theta(t)$ est lisse et qu'elle satisfait

$$\cos\theta(t) = \xi(c(t)) \qquad \text{et} \qquad \sin\theta(t) = \eta(c(t)).$$