MAT2410 : TRAVAUX PRATIQUES 1

Problème 1. Trouvez le champ de vecteurs tangents, et le champ de vecteurs tangentes unitaire pour les courbes suivantes :

$$\text{(i)}\quad \begin{aligned} \gamma\colon [0,2\pi] &\to \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (\cos(t), \sin(t)); \end{aligned}$$

$$\text{(ii)}\quad \begin{aligned} \gamma\colon [0,\pi] &\to \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (\cos(2t), \sin(2t)). \end{aligned}$$

Problème 2.

(i) Expliquez comment la définition de la dérivée L d'une fonction $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ généralise la notion usuelle de la derivée d'une fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$?

(ii) Lorsque L existe pouvez-vous montrer qu'elle est unique ?

(iii) Pouvez-vous alors en donner une expression en termes des dérivées partielles de f ?

(iv) Donnez un exemple d'une fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ qui possède des dérivées partielles en $(0,0)$ mais qui n'est pas dérivable en $(0,0)$.

Problème 3. Calculez la dérivée de $f(x,y) = \log(\cos(x^2 y))$ en $(1/4, \pi)$.

Problème 4. * A partir de la définition de dérivée d'une fonction $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, donnez une expression du plan tangent en un point du graphe de f en termes du gradient ∇f.

Problème 5. Soit $\gamma(t)$ une courbe régulière de $\mathbb{R}^n$ et supposons que $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est dérivable. On considère la courbe $\sigma = F \circ \gamma$. Donnez une formule pour le vecteur tangent en t_0 à $\sigma(t)$ en fonction de données obtenues à partir de γ et F.

Problème 6. Soit $f(x,y)$ une fonction et considérons le changement de variables en coordonnées polaires $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$. Exprimez $\frac{\partial f}{\partial \theta}$ et $\frac{\partial f}{\partial r}$ en termes de $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Problème 7. * Soit $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dérivable et considérons les coordonnées sphériques données par $x = \rho\cos\theta\sin\phi$, $y = \rho\sin\theta\sin\phi$, $z = \rho\cos\phi$. Exprimez alors $\partial f/\partial\rho$, $\partial f/\partial\theta$ et $\partial f/\partial\phi$ en termes de $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ et $\frac{\partial f}{\partial z}$.

Problème 8. Etant donné f et g fonctions dérivables de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, démontrez la formule

$$\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f.$$

Problème 9. * Calculez la dérivée directionnelle de $f(x, y, z) = x^2e^{-yz}$ dans la direction $v = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ au point $(1, 0, 0)$.

Problème 10. Soit $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et supposons que (x_0, y_0, z_0) est sur la surface de niveau S donnée par $f(x, y, z) = K$, où K est une constante. Démontrez que $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ est orthogonal à S au sens suivant : si $\gamma(t)$ est une courbe régulière sur S avec $\gamma(0) = (x_0, y_0, z_0)$, alors on a $< \nabla f(x_0, y_0, z_0)\ ,\ \gamma'(0) > =\ 0$.

Problème 11. * Selon la loi de gravitation de Newton, la *force gravitationnelle* $\mathbf{F}$ produite par une masse M située à l'origine de $\mathbb{R}^3$ sur une masse m située en (x, y, z) est donnée par

$$\mathbf{F} = -\frac{GmM}{r^2}\ \mathbf{n},$$

où G est une constante, $r = ||\mathbf{r}|| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ et $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$.

(i) On appelle $V = -GmM/r$ le *potentiel gravitationnel de Newton.* Démontrez que l'on a alors $\mathbf{F} = -\nabla V$.

(ii) Vérifiez que les surfaces de niveau de V sont des sphères centrées en l'origine et que $\mathbf{F}$ est orthogonal à ces sphères.

(iii) Démontrez que le potentiel de Newton V est une fonction harmonique, c'est-à-dire qu'elle satisfait l'équation de Laplace $\Delta V := \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$.

Problème 12. Dans $\mathbb{R}^3$ muni du repère $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ on pose $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ et $r = ||\mathbf{r}||$.

(i) Démontrez que l'on a

$$\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\mathbf{r}}{r^3}.$$

(ii) Par la *loi de Coulomb* en électrostatique, la force d'attraction entre deux particules de charges opposées est donnée par $\mathbf{P} = k(r/||\mathbf{r}||^3)$, où k est une constante et $\mathbf{r}$ est le vecteur exprimant la différence de position entre les deux particules. Démontrez alors que l'on a

$$\mathbf{P} = -\nabla\left(\frac{k}{||\mathbf{r}||}\right).$$