MAT2410 : TRAVAUX PRATIQUES 7

Problème 1. * Sur $\mathbb{R}^{2n}$ on met les coordonnées $(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ et on considère la 2-forme extérieure

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge dy_i.$$

Calculez $\omega^n = \omega \wedge \omega \wedge \cdots \wedge \omega \in \Lambda^{2n}(\mathbb{R}^{2n})$. (Indice : commencez par les cas $n = 1, 2$ et 3.)

Problème 2. Etant donné une fonction lisse $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, on appelle *Laplacien de la fonction* f la fonction

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}.$$

On rappelle que $d \colon \Omega^0(\mathbb{R}^n) \to \Omega^1(\mathbb{R}^n)$ est l'opérateur de dérivation extérieure donné par

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n.$$

Démontrez que l'on a les formules suivantes :

(i) $\Delta f = (*d * d)f$,

(ii) $\Delta(fg) = (\Delta f)g + f(\Delta g) + 2 * (df(*dg))$.

Problème 3. * A l'aide des formes différentielles, démontrez l'identité suivante en calcul vectoriel : $\operatorname{div}(\nabla f \times \nabla g) = 0$.

Problème 4. Soit $\omega = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k \; dx_k$ une 1-forme fermée sur $\mathbb{R}^n$. On définit alors la fonction $g \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ par

$$g(x) = \int_0^1 f_1(t, x_2, x_3, \ldots, x_n) dt + \int_0^1 f_2(0, t, x_3, \ldots, x_n) dt + \ldots + \int_0^1 f_n(0, 0, 0, \ldots, t) dt.$$

Démontrez alors que l'on a $\omega = dg$ sur $\mathbb{R}^n$.

Problème 5. * Etant donné $\omega = x^2 dy \wedge dz + y^2 dz \wedge dt$ et $\phi \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, donnée par

$$\phi(a, b, c) = (a, b, c, abc)$$

calculez $\phi^* \omega$.

Problème 6. Soit $\phi(x_1, x_2) = (x_1^3, x_1^2 x_2, x_1 x_2^2, x_2^3)$. Calculez

(i) $\phi^*(y_1 + 3y_2 + 3y_3 + y_4)$;

(ii) $\phi^* dy_1,\ \phi^* dy_2,\ \phi^* dy_3,\ \phi^* dy_4$;

(iii) $\phi^*(dy_2 \wedge dy_3)$