MAT2410 : TRAVAUX PRATIQUES 6

Problème 1. En chaque cas $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^3)$ pour certaines k. Trouvez $d\omega$:

(1) $\omega = x^2\, dx \wedge dy + z \sin(x)\, dy \wedge dz$.

(2) $\omega = xyz\, dy$.

(3) * $\omega = x^2 \sin(y - z)$.

(4) $\omega = \sin(y)\, dx + \cos(x)\, dy$.

(5) * $\omega = xy\, dx + xz\, dy + xyz\, dz$.

(6) * $\omega = xy^2\, dy \wedge dz + x^3 z\, dx \wedge dz - (y + z^9)\, dx \wedge dy$.

(7) * $\omega = x^2 y^3 z^4\, dx \wedge dy \wedge dz$.

Problème 2. Quelle sont les groupes de cohomologie de deRham de m copies disjointes de $\mathbb{R}^n$, $H^k_{dR}(\coprod^m \mathbb{R}^n)$?

Problème 3. Démontrez que $d(a\alpha + b\beta) = ad\alpha + bd\beta$ $(\forall \alpha, \beta \in \Omega^k(\mathbb{R}^n),\ \forall a, b \in \mathbb{R})$.

Problème 4. Pour chaque $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^3)$, trouvez une forme différentielle $\eta \in \Omega^{k-1}(\mathbb{R}^3)$ telle que $d\eta = \omega$.

(a) $\omega = dx \wedge dy$.

(b) $\omega = dx \wedge dy \wedge dz$.

(c) $\omega = yz\, dx + xz\, dy + xy\, dz$.

(d) $\omega = y^2 z^2\, dx + 2xyz^2\, dy + 2xy^2 z\, dz$.

(e) $\omega = (y^2 - 2xy) \cos(xy^2)\, dx \wedge dy$.

Problème 5. (Une forme fermée qui n'est pas exacte) On considère la 1-forme différentielle définie sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

$$\omega = \frac{-y}{x^2 + y^2}\, dx + \frac{x}{x^2 + y^2}\, dy.$$

(i) Montrez par un calcul explicite que ω est fermée.

(ii) On rappelle que $F\colon (0,+\infty)\times(0,2\pi)\to\mathbb{R}^2$ donnée par $F(r,\theta)=(r\cos\theta, r\sin\theta)$ est injective avec dF partout injective également, si bien que l'on a $F^{-1}(x,y)=(r(x,y),\theta(x,y))$ avec

$$r(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\theta(x,y)=\begin{cases}\arctan(y/x) & x>0,\ y>0\\ \pi+\arctan(y/x) & x<0\\ 2\pi+\arctan(y/x) & x>0,\ y<0\\ \pi/2 & x=0,\ y>0\\ 3\pi/2 & x=0, y<0\end{cases}$$

Montrez que sur $\mathbb{R}^2-\{\mathbb{R}^+\times 0\}$ on a $\omega=d\theta$.

(iii) Montrez que θ ne peut être étendue de manière continue à $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$.

(iv) Déduisez de ce qui précède qu'il n'existe pas de fonction $f\colon\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}\to\mathbb{R}$ telle que $\omega=df$.

Problème 6. * Est-ce que les champs de vecteurs

(1) $\vec{F}=\begin{pmatrix} xy^2\\ yx^2\\ z^3-z+1\end{pmatrix}$ et

(2) $\vec{G}=\begin{pmatrix} xy^2z\\ yx^2z\\ \frac{1}{2}y^2x^2+x\end{pmatrix}$

sont les champs de vecteurs gradient ? Démontrez vos réponses.

Problème 7. On définit

$$\nabla^2 f := \nabla\cdot(\nabla f).$$

Démontrez les identités suivantes :

(1) * $\nabla(fg)=f\nabla g+g\nabla f$

(2) $\nabla\cdot(f\vec{F})=f\nabla\cdot\vec{F}+\vec{F}\cdot\nabla f$

(3) * $\nabla\times(f\vec{F})=f\nabla\times\vec{F}+\nabla f\times\vec{F}$

(4) $\nabla \times (\nabla \times \vec{F}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{F}) - \nabla^2 \vec{F}$

(5) $\nabla \cdot (\vec{F} \times \vec{G}) = \vec{G} \cdot (\nabla \times \vec{F}) - \vec{F} \cdot (\nabla \times \vec{G})$

pour f, g des fonctions de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ et $\vec{F},\ \vec{G}$ des champs de vecteurs sur $\mathbb{R}^3$. Vous n'êtes pas obligé d'utilisez les formes differentielles.