MAT2410 : TRAVAUX PRATIQUES 3

Problème 1.

(1) Trouvez $\sin(\pi/12)$ précisement.

(2) Exprimez $\tan(3\theta)$ par rapport au $\sin\theta$, $\cos\theta$ ou $\tan\theta$.

Problème 2. * On rappelle que pour tout vecteur tangent $X_p \in T_p\mathbb{R}^3$ la dérivé directionnelle le long de X_p de fonctions lisses $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ donnée par

$$X_p(f) = \frac{d}{dt}(f(X_p(t)))|_{t=0}$$

permet d'interpréter X_p comme un opérateur $X_p\colon C^\infty(\mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}$. Démontrez que l'on a alors pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ et pour $X_p, Y_p \in T_p\mathbb{R}^3$:

(i) $X_p(\alpha f + \beta g) = \alpha X_p(f) + \beta X_p(g)$

(ii) $X_p(fg) = X_p(f)g(p) + f(p)X_p(g)$

(iii) $(\alpha X_p + \beta Y_p)(f) = \alpha X_p(f) + \beta Y_p(f)$.

Calculez $X_p(f)$ où $f(x, y, z) = x^3y + z$,

$$X_{p=(x,y,z)} = 3y\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_p + z\sin x\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_p - 7\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)_p$$

en $p = (0, 1, 1)$.

Problème 3. Expliquez comment on peut interpréter un champ de vecteur X dans $\mathbb{R}^3$ comme une application $X\colon C^\infty(\mathbb{R}^3) \to C^\infty(\mathbb{R}^3)$. Si X et Y sont deux tels champs de vecteurs, $f, g, h \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ montrez qu'on a alors :

(i) $(fX + gY)(h) = fX(h) + gY(h)$

(ii) $X(\alpha f + \beta g) = \alpha X(f) + \beta X(g)$

(iii) $X(fg) = X(f)g + fX(g)$.

Problème 4. * Soit $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $F(0, 0) = 0$. Quelle condition sur $F(x, y)$ garantit que $F(F(x, y), y) = 0$ puisse être résolue pour y en fonction C^1 de x près de $(0, 0)$? (Indice : règle de dérivation en chaîne)

Problème 5. Quelle est la reparametrisation de

$$\gamma(t) = \left(\frac{2}{t^2+1} - 1, \frac{2t}{t^2+1} \right)$$

par rapport au longeur d'arc, avec point de base $(0,1)$, en direction de t croissante ?