MAT2410 : TRAVAUX PRATIQUES 2

Problème 1.

(i) Trouvez le longeur d'arc de la courbe $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, \sqrt{3}t)$ dans $\mathbb{R}^3$ entre les points $(1,0,0)$ et $(1,0,2\pi\sqrt{3})$.

(ii) Trouvez le longeur d'arc de la courbe $\beta(t) = (\sqrt{2}t, e^t, e^{-t})$ dans $\mathbb{R}^3$ entre les points $(0,1,1)$ et $(\sqrt{2}, e, e^{-1})$.

(iii) Trouvez le longeur de la courbe donnée en coordonées polaires par $r = 2\cos\theta$, $0 \leq \theta \leq \pi/2$.

Problème 2. * Imaginez que vous attrapiez un clou dans le pneu de votre vélo. Tandis que la roue (qui a rayon 1) se tourne une révolution, quel est le longeur de l'arc tracé par le clou ?

Problème 3. Soit $\alpha\colon [c,d] \to \mathbb{R}^3$ une courbe. Soit $a, b \in [c,d]$ et soit $\mathbf{p} := \alpha(b)$ et $\mathbf{q} := \alpha(a)$.

(a) Montrez que, pour chaque vecteur $\mathbf{v}$ constante avec $|\mathbf{v}| = 1$, on a

$$(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \cdot \mathbf{v} = \int_a^b \alpha'(t) \cdot \mathbf{v}\,\mathrm{d}t \leq \int_a^b |\alpha'(t)|\,\mathrm{d}t.$$

(b) Soit

$$\mathbf{v} := \frac{\mathbf{p} - \mathbf{q}}{|\mathbf{p} - \mathbf{q}|}$$

et montrez que

$$|\alpha(b) - \alpha(a)| \leq \int_a^b |\alpha'(t)|\,\mathrm{d}t,$$

c'est à dire que la courbe de la plus petite longeur entre $\mathbf{p}$ et $\mathbf{q}$ est la ligne droite joignant ces points.

Problème 4. Soit $w = f(x,y)$ une fonction de classe C^2 et supposez qu'on ait $x = u + v$ et $y = u - v$. Démontrez alors que

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}.$$

Problème 5. * Soit $\mathbf{F}(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y))$ un champ de vecteurs dans $\mathbb{R}^2$ qui est de classe C^2. Démontrez que si l'on a $\mathbf{F} = \nabla f$ pour une certaine fonction $f(x,y)$, alors on doit avoir

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x}.$$

Déduisez de ce qui précède que $\mathbf{F}(x,y) = (y\cos x, x\sin y)$ ne peut pas être exprimé comme un champ de vecteurs gradient.

Problème 6. Qu'est-ce qui cloche dans l'argument suivant :

Supposons que l'on a $w = f(x,y)$ et $y = x^2$, alors par la règle de chaîne on a

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} + 2x\frac{\partial w}{\partial y}$$

si bien que l'on doit avoir $2x\ \partial w/\partial y = 0$.

Problème 7. Soit $\alpha(t)$ une courbe régulière de $\mathbb{R}^3$ et $s = s(t)$ sa fonction longueur d'arc. On a que

$$s(t) = \int_0^t ||\alpha'(\tau)||d\tau.$$

Si on dénote par $\mathbf{T}(t)$ le champ de vecteurs tangents unitaire le long de $\alpha(t)$, montrez qu'on a :

(i) $\alpha'(t) = \frac{ds}{dt}(t)\mathbf{T}(t)$. **(ii)** $\mathbf{T}(t) = \frac{d\alpha}{ds}(t)$.

Problème 8. * Soit $\alpha(t) = u + tv$ une équation de droite dans $\mathbb{R}^3$. Démontrez alors que la reparamétrisation de cette courbe par la longueur d'arc est donnée par la formule

$$\beta(s) = u + s\frac{v}{||v||}.$$

Problème 9. * Démontrez les énoncés suivants à propos des courbes et champs de vecteurs de $\mathbb{R}^2$:

(i) Une courbe $\alpha(t)$ est constante $\iff$ le champ de vecteur $\alpha'(t)$ est identiquement nul.

(ii) Une courbe non-constante $\alpha(t)$ est une droite de vitesse constante $\iff$ $\alpha''(t) \equiv 0$

(iii) L'image d'une courbe non-constante $\alpha(t)$ est un arc d'un cercle de centre l'origine $\iff$ $\alpha'(t)$ est orthogonale à $\alpha(t)$ pour tout t.