MAT2410 : DEVOIR

10 points pour chaque problème.

Problème 1. Soit

$$\omega_1 = x^2 y\, dx + 2z^3 y\, dy + xz\, dz \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$$

et soit

$$\omega_2 = yz\, dx \wedge dy - 3z^2 dx \wedge dz \in \Omega^2(\mathbb{R}^3).$$

Calculez $\omega_1 \wedge \omega_2$, $d\omega_1$ et $d\omega_2$.

Problème 2. Soit

$$\varphi(x, y, z) = xyz + 3x^2 - 2y^2 z^2$$

une application $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ et soit

$$F = (3x, -y, 2z^2 + y - 1)$$

un champ vectoriel sur $\mathbb{R}^3$. Calculez $\nabla\varphi$, $\operatorname{div} F$, $\operatorname{rot} F$, $\operatorname{rot} F \times \nabla\varphi$ et $\operatorname{div}(\operatorname{rot} F)$.

Problème 3. Soit $\phi(x_1, x_2) = (x_1^3, x_1^2 x_2, x_1 x_2^2, x_2^3)$. Calculez
(i) $\phi^*(y_1 + 3y_2 + 3y_3 + y_4)$;
(ii) $\phi^* dy_1,\ \phi^* dy_2,\ \phi^* dy_3,\ \phi^* dy_4$;
(iii) $\phi^*(dy_2 \wedge dy_3)$

Problème 4. On considère les coordonnées sphériques sur $\mathbb{R}^3$

$$\Phi(r, \theta, \phi) = (r\cos\theta\cos\phi, r\sin\theta\cos\phi, r\sin\phi).$$

Calculez $\Phi^*\alpha$ pour les formes suivantes α :
$dx,\ dy,\ dz,\ dx \wedge dy,\ dx \wedge dz,\ dy \wedge dz,\ dx \wedge dy \wedge dz.$

Problème 5. Soit $c\colon [-1, 3] \to \mathbb{R}^2$ une courbe donnée par $t \mapsto (3 + 2t, 1 - t)$ et soit $\omega = x^2\, dy + (y^3 - 2x)\, dx \in \Omega^2(\mathbb{R}^2)$. Calculez $\int_c \omega$.

Problème 6. Si $\alpha \in \Omega^k(\mathbb{R}^m)$ est une k-forme différentielle, c est un k-cube singulier sur $\mathbb{R}^n$ et que $\phi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est une application lisse, montrez que l'on a alors

$$\int_c \phi^*\alpha = \int_{\phi\circ c} \alpha.$$

Problème 7. Soit

$$\begin{aligned} c\colon [0,3]\times[-1,1] &\to \mathbb{R}^2 \\ (t_1,t_2) &\mapsto (2t_1-1+t_2, 3t_2) \end{aligned}$$

et soit $\omega = (x^2y+1)\,dy\wedge dx$. Trouvez $\int_c \omega$.

Problème 8. On considère le 2-cube $c\colon [0,1]\times[0,1] \to \mathbb{R}^3$ donné par

$$c(t_1,t_2) = (t_1^2, t_1t_2, t_2^2),$$

et la 1-forme

$$\alpha = x_1dx_2 + x_1dx_3 + x_2dx_3.$$

Calculez explicitement $\int\limits_c d\alpha$ et $\int\limits_{\partial c} \alpha$ en vous assurant que vous obtenez bien la même réponse.

Problème 9. Soit $\omega \in \Omega^1(\mathbb{R}^2)$ une 1-forme fermée et c_1, c_2 des 1-cubes donnés par

$$c_1(t) = (t,0)\ (t\in[2\pi,6\pi]) \qquad \text{et} \qquad c_2(t) = (t\cos t, t\sin t)\ (t\in[2\pi,6\pi]).$$

Montrez alors que $\int\limits_{c_1} \omega = \int\limits_{c_2} \omega$.

Problème 10. Ce problème est plutôt long et difficile, mais sa pondération est assez légère pour le devoir (10%), donc vous pourriez obtenir une bonne note sans le faire. Mais pour ceux qui veulent en savoir plus sur les groupes de cohomologie de deRham $H^k_{dR}(\mathcal{U})$ pour les ensembles ouverts $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ plus genéraux que les ensembles etoilés, et comment on peut démontrer qu'ils sont parfois non nuls pour $k > 0$, continuez à lire. Cela en vaut la peine, je vous le jure.

(a) Une suite d'espaces vectoriels

$$\cdots \to C^{k-2} \xrightarrow{d_{k-2}} C^{k-1} \xrightarrow{d_{k-1}} C^k \xrightarrow{d_k} C^{k+1} \to \cdots$$

est dite *exacte* si $\ker d_j = \operatorname{im} d_{j-1}$ pour tous j. Lesquelles des suites suivantes sont exactes ?

(i) $0 \to V \xrightarrow{f} W$ où f est surjective.

(ii) $V \xrightarrow{f} W \to 0$ où f est surjective.

(iii) $0 \to \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4 \to 0$.

(iv) $0 \to \mathbb{R} \xrightarrow{x \mapsto (x,x)} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{(x,y) \mapsto (x-y)} \mathbb{R} \to 0$.

(v) $0 \to \mathbb{R} \xrightarrow{x \mapsto (2x,0)} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{(x,y) \mapsto (x)} \mathbb{R} \to 0$.

(b) Si $0 \to V_1 \xrightarrow{d_1} V_2 \xrightarrow{d_2} V_3 \xrightarrow{d_3} \cdots$ est exacte, quel sont les espaces quotients $\ker(d_k)/\operatorname{im}(d_{k-1})$?

(c) Si les suites d'espaces vectoriels suivantes sont exactes, trouvez U, V et W :

(i) $0 \to \mathbb{R}^2 \to U \to \mathbb{R}^3 \to 0$.

(ii) $0 \to V \to \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \to 0$.

(iii) $0 \to \mathbb{R}^3 \to W \to 0$.

(d) Un *complexe de cochaines* est une suite d'espaces vectoriels C^i, $i \in \mathbb{Z}$, avec des applications linéaires $d_k \colon C^k \colon C^{k+1}$ pour tous k, telles que $d_{k+1} \circ d_k = 0$. Par exemple, $C^k = \Omega^k(\mathcal{U})$ définit un complexe de cochaines avec la derivée extérieure pour d_k. Un complexe de cochaines a des groupes de cohomologie $H^k(C^*) := \ker d_k / \operatorname{im} d_{k-1}$. Quels sont les groupes de cohomologie de :

$$C^0 = \mathbb{R} \xrightarrow{0} C^1 = \mathbb{R} \xrightarrow{x \mapsto (x,x)} C^2 = \mathbb{R}^2 \to C^3 = 0?$$

(e) Une *application de cochaines* $f\colon C^* \to D^*$ est une suite d'applications linéaires $f^i\colon C^i \to D^i$, pour tout i, telles que

$$d_i^D \circ f^i = f^{i+1} \circ d_i^C\colon C^i \to D^{i+1}$$

pour tout i. Les tirés-en-arrière sont des exemples. On a vu en classe qu'une application de cochaines induit des applications $f^*\colon H^k(C^*) \to H^k(D^*)$ sur les groupes de cohomologie.

Soient $f\colon C^* \to D^*$ et $g\colon D^* \to E^*$ applications de cochaines telles que

$$0 \to C^i \xrightarrow{f^i} D^i \xrightarrow{g^i} E^i \to 0$$

est exacte pour tout i. Notre but est de montrer qu'il y a une suite exacte

$$\begin{array}{cccccccc} & & & \cdots & \xrightarrow{g^*} & H^{i-1}(E^*) & \\ \xrightarrow{\delta} & H^i(C^*) & \xrightarrow{f^*} & H^i(D^*) & \xrightarrow{g^*} & H^i(E^*) & \\ \xrightarrow{\delta} & H^{i+1}(C^*) & \xrightarrow{f^*} & H^{i+1}(D^*) & \xrightarrow{g^*} & H^{i+1}(E^*) & \to \cdots \end{array} \tag{1}$$

pour une certaine application δ que nous allons construire. Le clé est d'utiliser le diagrame commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & C^{i-1} \arrow[r, "f^{i-1}"] \arrow[d, "d_{i-1}^C"] & D^{i-1} \arrow[r, "g^{i-1}"] \arrow[d, "d_{i-1}^D"] & E^{i-1} \arrow[r] \arrow[d, "d_{i-1}^E"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C^{i} \arrow[r, "f^{i}"] \arrow[d, "d_{i}^C"] & D^{i} \arrow[r, "g^{i}"] \arrow[d, "d_{i}^D"] & E^{i} \arrow[r] \arrow[d, "d_{i}^E"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C^{i+1} \arrow[r, "f^{i+1}"] \arrow[d, "d_{i+1}^C"] & D^{i+1} \arrow[r, "g^{i+1}"] \arrow[d, "d_{i+1}^D"] & E^{i+1} \arrow[r] \arrow[d, "d_{i+1}^E"] & 0 \\
 & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}$$

Les colonnes satisfont $d^2 = 0$ et les lignes sont exactes. Soit $e \in E^i$ un élément qui represente une classe de cohomologie, c'est à dire que $d_i^E(e) = 0$. On va produire une élément de C^{i+1}. Premièrement, relevez e à $x \in D^i$, i.e. $g^i(x) = e$.

(i) Pourquoi est-ce qu'on peut faire ceci ?

(ii) Démontrez que $d_i^D(x) \in \operatorname{im} f^{i+1}$.

(iii) Choisissez $c \in C^{i+1}$ avec $f^{i+1}(c) = d_i^D(x)$. Démontrez que ceci donne une application bien définie $\delta\colon H^i(E^*) \to H^{i+1}(C^*)$. Vous devez montrer que :

— $c \in \ker(d_{i+1}^C)$.

— Le résultat $[c] \in H^{i+1}(C^*)$ ne change pas si on remplace e par $e + d_{i-1}(\widetilde{e})$, un autre représentant pour $[e]$ dans le même classe d'équivalence.

— Le résultat $[c] \in H^{i+1}(C^*)$ ne change pas si on change le choix de $x \in D^i$ tel que $g^i(x) = e$.

— Le choix de $c \in C^{i+1}$ tel que $f^{i+1}(c) = d_i^D(x)$ est fixé.

(f) Démontrez que la suite des groupes de cohomologie (1) est exacte. Pour le faire, utilisez le grand diagramme ci-dessus, et montrez que :

— $\ker \delta = \operatorname{im} g^*$;

— $\ker g^* = \operatorname{im} f^*$;

— $\ker f^* = \operatorname{im} \delta$.

On remarque que pour chaque item ci-dessus, il y a en fait deux choses à montrer, les deux inclusions $\subseteq$ et $\supseteq$. Donc cette partie de la question est plutôt longue.

(g) Puis, soient $\mathcal{U}, \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n$ des ensembles ouverts. Nous avons des inclusions

$$i_{\mathcal{U}}\colon \mathcal{U} \cap \mathcal{V} \to \mathcal{U};\ i_{\mathcal{V}}\colon \mathcal{U} \cap \mathcal{V} \to \mathcal{V}$$

et d'ailleurs

$$j_{\mathcal{U}}\colon \mathcal{U} \to \mathcal{U} \cup \mathcal{V};\ j_{\mathcal{V}}\colon \mathcal{V} \to \mathcal{U} \cup \mathcal{V}.$$

Démontrez que les tirés-en-arrière donnent, pour chaque k, une suite exacte (d'espaces vectoriels de dimension infinie) :

$$0 \to \Omega^k(\mathcal{U} \cup \mathcal{V}) \xrightarrow{\omega \mapsto (j_{\mathcal{U}}^*(\omega), j_{\mathcal{V}}^*(\omega))} \Omega^k(\mathcal{U}) \oplus \Omega^k(\mathcal{V}) \xrightarrow{(\omega,\eta) \mapsto i_{\mathcal{U}}^*(\omega) - i_{\mathcal{V}}^*(\eta)} \Omega^k(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) \to 0.$$

La partie qui constitue un défi est de montrer la surjectivité de $(i_{\mathcal{U}}^*, -i_{\mathcal{V}}^*)$.

(h) Soient

$$C^* := \Omega^*(\mathcal{U} \cup \mathcal{V})$$

$$D^* := \Omega^*(\mathcal{U}) \oplus \Omega^*(\mathcal{V})$$

et

$$E^* := \Omega^*(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}).$$

Nous avons $H^k(A^* \oplus B^*) \cong H^k(A^*) \oplus H^k(B^*)$ pour n'importe quels complexes de cochaines A^*, B^*. Montrez qu'il y a une suite exacte

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \cdots & \to & H^{i-1}_{dR}(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) & \\ \xrightarrow{\delta} & H^i_{dR}(\mathcal{U} \cup \mathcal{V}) & \to & H^i_{dR}(\mathcal{U}) \oplus H^i_{dR}(\mathcal{V}) & \to & H^i_{dR}(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) & \\ \xrightarrow{\delta} & H^{i+1}_{dR}(\mathcal{U} \cup \mathcal{V}) & \to & H^{i+1}_{dR}(\mathcal{U}) \oplus H^{i+1}_{dR}(\mathcal{V}) & \to & H^{i+1}_{dR}(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) & \to \cdots \end{array}$$

Ceci est nommé la suite exacte longue de Mayer-Vietoris.

(i) Maintenant, nous voulons utiliser notre magnifique suite de cohomologie pour calculer les groupes de cohomologie pour des ensembles interessants. Soient $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ ensembles ouverts de $\mathbb{R}^n$ étoilés, avec $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$ aussi étoilé. Montrez que $H^0_{dR}(\mathcal{U} \cup \mathcal{V}) \cong \mathbb{R}$ et que $H^k_{dR}(\mathcal{U} \cup \mathcal{V}) = 0$ pour $k > 0$. Quels auraient été les groupes de cohomologie de deRham si on avait eu $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$?

(j) En profitant de la suite exacte de Mayer-Vietoris ci-dessus, trouvez les groupes de cohomologie de deRham des sous-ensembles de $\mathbb{R}^3$ suivants :

  (i) $\mathcal{W} := \{((2+r\cos\varphi)\cos\theta, (2+r\cos\varphi)\sin\theta, r\sin\varphi) \in \mathbb{R}^3 \mid \theta, \varphi \in [0, 2\pi), r \in [0,1]\}$.

  (ii) $\mathcal{X} := \{r(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, r < (-1/4, 1/4)\}$.

  (iii) Bonus : calculez les groupes de cohomologie du tore (épaissi dans $\mathbb{R}^3$ afin d'avoir un ensemble ouvert).

Il faut décomposer les ensembles aux parties plus simple, dont on sait déjà leur groupes de cohomologie, et les groupes de cohomologie de leur intersection.

(k) Soit $\mathcal{D} := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$. Montrez qu'aucune paire parmi $\mathcal{W}$, $\mathcal{X}$ et $\mathcal{D}$ sont difféomorphes.