

## PSEUDO-ISOTOPIES ET ISOTOPIES EN DIMENSION QUATRE DANS LA CATEGORIE TOPOLOGIQUE

B. PERRON

(Received 23 May 1985)

### §0. INTRODUCTION

SOIT  $M^4$  une variété topologique compacte (non nécessairement lissable), de dimension 4. L'objet de cet article est l'étude de la conjecture suivante:

**CONJECTURE PI.** *Tout homéomorphisme  $F$  de  $M \times I$  ( $I = [0, 1]$ ), égal à l'identité sur  $M \times \{0\} \cup \partial M \times I$  (e.g. pseudo-isotopie de  $M$ ) est isotope, fixant  $M \times \{0\} \cup \partial M \times I$ , à l'identité. En particulier la restriction de  $F$  à  $M \times \{1\}$  est isotope, fixant  $\partial M \times \{1\}$ , à l'identité.*

Cette conjecture peut évidemment être posée en toute dimension et dans l'une des trois catégories TOP, PL, DIFF. Dans [3], J. Cerf a démontré que la conjecture est vraie dans la catégorie  $C^\infty$  pour les variétés de dimension  $\geq 5$  simplement connexes. Le cas PL est dû à C. Morlet [20] (voir aussi [14]). Le cas topologique résulte des travaux de Kirby-Siebenmann [7].

Les principaux résultats de cet article sont donnés par le théorème suivant et ses corollaires:

**THÉORÈME 0.** *La conjecture PI est vraie pour les variétés compactes  $M^4$  obtenue de la boule  $B^4$  en lui attachant des anses (topologiques) d'indice  $\geq 2$ .*

De telles variétés sont simplement connexes et lissables (cette dernière propriété résulte du théorème de Moise sur l'unicité des structures lisses sur les variétés de dimension trois [11]).

Les fibres de Milnor des germes de fonctions holomorphes à singularité isolée de  $(C^3, 0)$  dans  $(C, 0)$  et les surfaces algébriques lisses de  $\mathbb{C}P^3$  admettent une telle décomposition (voir respectivement [8], [6]; voir aussi [1]). A l'opposé, Casson (non publié; voir [10] chap. 3) a donné un exemple de variété  $C^\infty$  à bord non vide, 1-connexe, dont toute décomposition en anses possède des anses d'indice 1.

Je dois la démonstration du résultat suivant à L. C. Siebenmann:

**COROLLAIRE 1.** *La conjecture PI est vraie pour les variétés topologiques (non nécessairement lissables), simplement connexes, compactes, sans bord.*

**COROLLAIRE 2.** *Soient  $M^4$  une variété donnée par le théorème 0 ou le corollaire 1 et  $h_1, h_2: M \rightarrow M$  deux homéomorphismes homotopes (mod  $\partial M$ ). Alors ils sont isotopes (mod  $\partial M$ ).*

*Démonstration.* Il suffit de montrer que l'homéomorphisme  $h_1 h_2^{-1}$  est l'extrémité d'une pseudo-isotopie. Pour cela il suffit de montrer que l'ensemble des structures de variété topologique à homotopie près sur  $M \times I$  est réduit à un point. La démonstration est alors

identique à celle du théorème 6.1 de [15] en utilisant le fait que  $\pi_{2i+1}(G/TOP) = 0$  pour  $i = 0, 1, 2$  d'après [7] et [18].

*Remarque.* On ne sait pas démontrer le théorème 0 dans la catégorie semi-linéaire (et encore moins dans la catégorie  $C^\infty$ ) à cause de l'utilisation d'un théorème de Casson-Freedman [5] qui donne seulement des isotopies topologiques.

L'idée de la démonstration du théorème 0 est de redresser la pseudo-isotopie anse par anse à partir du bord [14]. On peut supposer que  $F|_{\{p_0\} \times I} = id$  où  $p_0$  est un point de l'intérieur de  $M$ . On commence par se mettre dans un cadre  $C^\infty$  en montrant que  $F|_{(M - \{p_0\}) \times I}$  est isotope modulo  $[\partial M \times I \cup (M - \{p_0\}) \times \{0\}]$  à une pseudo-isotopie  $G: (M - \{p_0\}) \times I \rightarrow \Theta$  telle que la structure différentiable au but  $\Theta$ , transportée par  $G$  de la structure différentiable donnée à la source soit "en tranches" (slice), c'est à dire que la projection  $p: [(M - \{p_0\}) \times I]_\Theta \rightarrow I$  soit une submersion  $C^\infty$ .

On suppose d'abord que  $M$  est obtenue de la boule  $B^4$  en attachant des anses d'indice deux uniquement, et on pose  $V = \bigcup_i D_i^2$  l'union des disques transverses aux anses d'indice 2. On peut supposer, à isotopie  $C^\infty$  près, que  $p \circ G|_{V \times I} \rightarrow [(M - \{p_0\}) \times I]_\Theta \xrightarrow{p} I$  est une fonction de Morse  $C^\infty$ .

À l'aide du théorème d'extension de l'isotopie topologique de [4], on peut définir pour chaque point critique de  $p \circ G$  une membrane topologique [12]. En utilisant les méthodes de [12], on montre que  $G|_{V \times I}$  est  $C^\infty$  isotope à un plongement,  $L: V \times I \rightarrow [(M - \{p_0\}) \times I]_\Theta$  tel que  $p \circ L$  n'a que des points critiques d'indice 1 et 2.

Dans un niveau intermédiaire, en utilisant des résultats de Casson [2], Quinn [13], et Freedman [5], on peut disjointer topologiquement les intérieurs des membranes et donc redresser topologiquement le plongement  $L|_{V \times I} \rightarrow M \times I$ . On montre ensuite qu'on peut redresser un voisinage tubulaire de  $V \times I$  (en évitant d'utiliser un théorème d'unicité du voisinage tubulaire topologique inconnu dans cette dimension). Une application du truc d'Alexander permet de conclure. Des méthodes analogues mais beaucoup plus faciles (car n'utilisant pas les résultats de Freedman) permettent de redresser les anses d'indice 3 et 4.

Je tiens à remercier L. Guillou et L. C. Siebenmann pour l'aide apportée lors de la réalisation de ce travail. L. C. Siebenmann m'a permis de grandement simplifier un certain nombre de démonstrations; de plus je lui dois la démonstration du corollaire 1.

Le plan de ce travail est le suivant; (§1) structures en tranches (slice); (§2) membranes; (§3) suppression des points critiques d'indice 0 et 3; (§4) disjonction des membranes; (§5) fin de démonstration du théorème 0 dans le cas où  $M$  n'a que des anses d'indice 2; (§6) démonstration du théorème 0 en présence d'anses d'indice 3 et 4; (§7) démonstration du corollaire 1.

## §1. STRUCTURES EN TRANCHES

*Définition 1.1.* Soit  $Q^q$  une variété topologique. Une structure différentiable  $\Theta$  sur  $Q \times I$  est dite "en tranches" (slice) si la projection  $p: (Q \times I)_\Theta \rightarrow I$  est une submersion  $C^\infty$ .

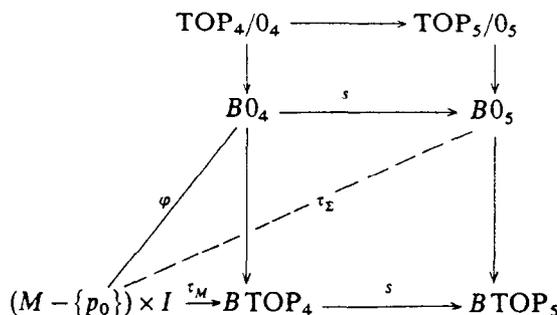
L'un des outils essentiels à la démonstration du théorème 0 est donné par le

**LEMME 1.2.** Soit  $M$  une variété compacte connexe de dimension quatre, simplement connexe,  $p_0$  un point de l'intérieur de  $M$  et  $\Sigma$  une structure  $C^\infty$  sur  $(M - \{p_0\}) \times I$ , qui est un produit au voisinage de  $\partial M \times I$ . Alors  $\Sigma$  est isotope mod  $\partial[(M - \{p_0\}) \times I]$  à une structure différentiable  $\Theta$  "en tranches", c'est à dire qu'il existe une isotopie  $K_t: (M - \{p_0\}) \times I \rightarrow (M - \{p_0\}) \times I$  ( $t \in [0, 1]$ ) telle que:

- (1)  $K_0 = id; K_t | \partial[(M - \{p_0\}) \times I] = id$  pour  $t \in [0, 1]$
- (2)  $K_1$  est  $C^\infty$  pour la structure  $\Sigma$  à la source et la structure  $\Theta$  au but.

*Démonstration.* Soit  $\tau = s \circ \tau_M : (M - \{p_0\}) \times I \rightarrow BTOP_4 \rightarrow BTOP_5$  l'application classifiante du microfibré tangent topologique de  $(M - \{p_0\}) \times I$  et  $\tau_\Sigma$  le relèvement de  $\tau$  dans  $B0_5$  défini par la structure  $\Sigma$  [7].

L'hypothèse de simple connexité implique que  $(M - \{p_0\}) \times I$  est, à homotopie près, obtenu de  $\partial[(M - \{p_0\}) \times I]$  en attachant des cellules de dimension 3. D'après Quinn ([13], corollaire 2.2.3) l'application de stabilisation  $TOP_4/0_4 \rightarrow TOP_5/0_5$  est 3-connexe. Il en résulte que  $\tau_\Sigma$  se factorise à homotopie près (mod  $\partial$ ) par une application  $\varphi$  dans  $B0_4$  (les flèches du diagramme ci-dessous étant des fibrations à homotopie près):



D'après le théorème de Lees [9],  $\varphi$  définit une structure en tranche sur  $(M - p_0) \times I$ , isotope (mod  $\partial((M - p_0) \times I)$ ) à la structure  $\Sigma$ .

**COROLLAIRE 1.3.** Soit  $F: M \times I \rightarrow M \times I$  une pseudo-isotopie telle que  $F|_{\{p_0\} \times I} = id$ . Alors  $F|(M - \{p_0\}) \times I$  est isotope mod  $[\partial M \times I \cup (M - \{p_0\}) \times \{0\}]$  à une pseudo-isotopie  $H: (M - \{p_0\}) \times I \rightarrow (M - \{p_0\}) \times I$  qui transporte la structure  $C^\infty$  donnée à la source sur une structure  $\theta$  en tranches au but.

*Démonstration.* Soit  $\Sigma$  la structure  $C^\infty$  sur  $(M - \{p_0\}) \times I$  transportée par  $F$  de la structure  $C^\infty$  donnée. Il suffit de poser  $H = K_1 \circ F$  où  $K_1$  est donné par le lemme 1.2.

§2. MEMBRANES

Dans ce paragraphe et les paragraphes 3 et 4, on se place dans le cas où  $M$  est obtenu de la boule  $B^4$  en attachant uniquement des anses d'indice 2.

On note  $V = \bigcup_i D_i^2$  l'union des 2-disques transverses aux anses d'indice deux de  $M$  et on prend  $p_0 \notin V$ .

**LEMME 2.1.** (a) On peut supposer que la fonction  $p \circ H|_{V \times I} \rightarrow [(M - p_0) \times I]_\theta \rightarrow I$  est une fonction de Morse  $C^\infty$ . Pour chaque point critique  $c$  de  $p \circ H|_{V \times I}$ , il existe une carte  $C^\infty$  autour de  $c$  dans  $V \times I$ , une carte  $C^\infty$  dans  $[(M - \{p_0\}) \times I]_\theta$  autour de  $H(c)$  où  $p: [(M - \{p_0\}) \times I]_\theta \rightarrow I$  et  $H$  s'écrivent:

- $p(x, y, z, s, t) = t$
- $H(x, y, z) = (x, y, z, 0, \epsilon_1 x^2 + \epsilon_2 y^2 + \epsilon_3 z^2)$ .

*Démonstration.* Elle est immédiate puisque  $p$  est  $C^\infty$ .

Notons  $D^{k+1} = \{x \in R^{k+1}; \|x\| \leq 1\}$ ,  $D_+^{k+1} = \{x \in D^{k+1}; x_{k+1} \geq 0\}$ ,  $\partial_+ D^{k+1} = \partial D^{k+1} \cap D_+^{k+1}$ .

*Définition 2.2.* (voir [12]). Soit  $H$  comme dans le lemme 2.1 et  $c$  un point critique de  $p \circ H$  d'indice  $k$ . Une membrane descendante de  $c$  jusqu'à un niveau  $M \times \{t_0\}$  est l'image d'un plongement (TOP),  $\eta: (D_+^{k-1}, \partial_+ D^{k+1}, D^k) \rightarrow (M \times [t_0, p \circ H(c)], H(V \times I), M \times \{t_0\})$  tel que

- (1)  $\text{Im}(\eta)$  et  $H(V \times I)$  se coupent transversalement le long de  $\eta(\partial_+ D)$ .
- (2)  $\eta(0, \dots, 0, 1) = H(c)$
- (3)  $\rho|_{\eta(\dot{D}_+^{k+1})}$  et  $p|_{(\eta(\partial_+ D^{k+1}) - H(c))}$  sont des submersions (TOP)
- (4)  $\eta(D^k) \subset M \times \{t_0\}$ .

Le disque  $\eta(D^k)$  est appelé la projection de la membrane sur le niveau  $M \times \{t_0\}$ . Le disque  $\eta(\partial_+ D^{k+1})$  est une nappe descendante du point critique  $c$  [3].

On a la notion correspondante de membrane ascendante.

**LEMME 2.3.** (existence des membranes). *Supposons que  $c$  soit l'unique point critique de  $p \circ H$  entre les niveaux  $M \times \{t_0\}$  et  $M \times \{t_1\}$  ( $t_0 < t_1$ ). Alors il existe une membrane descendante (resp. ascendante) de  $c$  jusqu'au niveau  $M \times \{t_0\}$  (resp.  $M \times \{t_1\}$ ), qui est différentiable pour la structure en tranche  $\theta$  au voisinage de  $H(V \times I)$ .*

*Démonstration.* Dans une carte  $C^\infty$  donnée par le lemme 2.1, on obtient une membrane ascendante  $C^\infty$  (resp. descendante) en considérant les trajectoires du champ  $\zeta = (\varepsilon_1 x, \varepsilon_2 y, \varepsilon_3 z, s, 2(x^2 + y^2 + z^2 + s^2) + (t - \varepsilon_1 x^2 - \varepsilon_2 y^2 - \varepsilon_3 z^2)^2)$  qui partent (resp. qui arrivent) en  $c$  (Fig. 1).

On peut remarquer que ce champ admet  $c$  comme unique point singulier, qu'il est tangent à l'hypersurface  $s = 0, t = \varepsilon_1 x^2 + \varepsilon_2 y^2 + \varepsilon_3 z^2$  et transverse aux facteurs  $t = Cte$ .

On obtient ainsi une membrane descendante (resp. ascendante)  $C^\infty$  pour  $\theta$ , jusqu'au niveau  $M \times (t_c - \varepsilon)$  (resp.  $M \times (t_c + \varepsilon)$ ) ( $\varepsilon > 0$  petit) où  $t_c = p \circ H(c)$ . L'image du plongement  $H|_{H^{-1}(M \times [t_0, t_c - \varepsilon])} \rightarrow [(M - \{p_0\}) \times [t_0, t_c - \varepsilon]]_\theta \rightarrow M \times [t_0, t_c - \varepsilon]$  est, par hypothèse, transverse au feuilletage horizontal. Le théorème d'extension de l'isotopie topologique [4] permet de prolonger la membrane descendante jusqu'au niveau  $M \times \{t_0\}$  de façon  $C^\infty$  le long de  $H(V \times I)$ . Le même raisonnement s'applique pour la membrane ascendante.

**LEMME 2.4.** *On peut supposer que les membranes descendantes (resp. ascendantes) des points critiques d'indice 0 et 1 (resp. 2,3) sont  $C^\infty$  pour la structure  $\theta$ .*

*Démonstration.* Soit  $c$  un point critique d'indice 0 ou 1 de  $p \circ H, M \times \{t_0\}$  un niveau en dessous de  $H(c)$  tel que  $p \circ H$  n'ait pas de point critique sur  $H^{-1}(M \times [t_0, p \circ H(c)])$ . Soit  $\mathcal{D}$  une membrane descendante  $C^\infty$  de  $H(c)$  jusqu'à un niveau  $t'_0 = p \circ H(c) - \varepsilon > t_0$  (elle existe

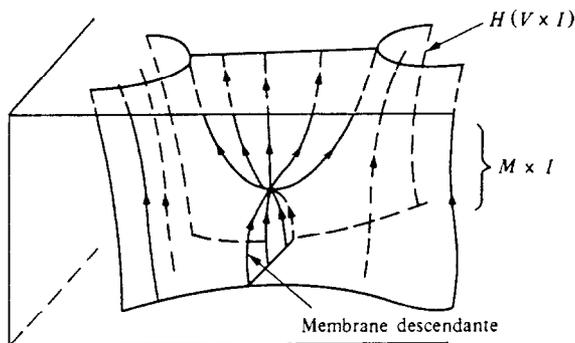


Fig. 1.

d'après le lemme 2.3). Notons  $W_{t_0, t'_0} = H(V \times I) \cap M \times [t_0, t'_0]$ ,  $V_{t'_0} = H(V \times I) \cap M \times \{t'_0\}$  et  $\theta'_0$  la structure  $C^\infty$  sur  $(M - \{p_0\}) \times \{t'_0\}$  induite par  $\theta$ .

Alors  $((M - \{p_0\}) \times [t_0, t'_0], W_{t_0, t'_0})_\theta$  est un  $(\delta, h)$ -cobordisme  $C^\infty$  relatif,  $(\delta, 1)$  connexe au sens de ([13], §2), pour toute application  $M - \{p_0\} \xrightarrow{\delta} (0, \infty)$ . Par le théorème du  $h$ -cobordisme relatif fin ([13], théorème 2.1.1. et son addendum), il existe une structure de produit topologique

$$h : ((M - \{p_0\}) \times \{t'_0\})_{\theta'_0}, V_{t'_0} \times [0, 1] \rightarrow (((M - \{p_0\}) \times [t_0, t'_0])_\theta, W_{t_0, t'_0}) \quad (1)$$

telle que:

(a)  $h$  est l'identité sur  $[(M - \{p_0\}) \times \{t'_0\}] \times \{0\}$

(b)  $h$  est  $C^\infty$  (pour les structures indiquées dans (1)) en dehors d'un ensemble  $U \times I$ , où  $U$  est un sous-ensemble " $\varepsilon$  singulier standard" de  $(M - \{p_0\}) \times \{t'_0\}$ . Ce sous-ensemble  $U$  est un  $\varepsilon$ -voisinage régulier  $C^\infty$  d'un complexe localement fini,  $C^\infty$ , de dimension 2, noté  $K \cup T$  (voir addendum du théorème 2.1.1. de [13]). Par transversalité  $C^\infty$ ,  $\mathcal{D} = \mathcal{D} \cap M \times \{t'_0\}$  (de dimension 0 ou 1) est disjointe de  $U$ . On peut donc prolonger la membrane ( $C^\infty$ )  $\mathcal{D}$  à l'aide du plongement différentiable  $h(\mathcal{D} \times I)$  jusqu'au niveau  $M \times \{t_0\}$ .

On rappelle quelques faits concernant les membranes (voir [12] chap. 2, §3).

(1) On peut faire monter (resp. descendre) un point critique le long d'une membrane (puisqu'on peut le faire dans le modèle), de façon  $C^\infty$  si la membrane est  $C^\infty$ .

(2) On peut faire monter un point critique  $d$  au-dessus d'un point critique  $c$  si la projection sur un niveau intermédiaire d'une membrane descendante de  $c$  est disjointe de la projection d'une membrane ascendante de  $d$ .

(3) A l'aide d'un plongement  $\eta : (D^k, \hat{c}) \rightarrow (M \times \{t\}, H(V \times I) \cap M \times \{t\})$  tel que  $\eta^{-1}(H(V \times I) \cap M \times \{t\}) = \hat{c}$  on peut introduire un point critique d'indice  $k$  (lemme 2.10 de [12]).

(4) Soient  $c, d$  deux points critiques de Morse d'indices  $k, k + 1$  consécutifs de  $p \circ H$  et  $M \times \{t_0\}$  un niveau intermédiaire. Alors  $c$  et  $d$  se détruisent mutuellement si et seulement si il existe une membrane ascendante (resp. descendante) de  $c$  (resp.  $d$ ) jusqu'au niveau  $M \times \{t_0\}$  telles que les intérieurs des projections des membranes soient disjoints et les bords des projections se coupent transversalement en un point dans  $H(V \times I) \cap (M \times \{t_0\})$  (lemme 2.9 [12]) (Fig. 2).

(5) Par le théorème relatif d'extension de l'isotopie topologique [4] toute nappe descendante  $C^\infty$  (resp. ascendante) de  $p \circ H$  correspond à une membrane descendante (resp. ascendante) vérifiant les propriétés du lemme 2.3.

(6) On peut définir la coupole associée à une membrane ([12] chap. 3, §1): dans une carte  $(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2})$  où  $H$  s'écrit  $H(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n, 0, -(x_1^2 + \dots + x_n^2) + x_{p+1}^2 + \dots + x_n^2)$  la coupole est définie dans l'hyperplan  $x_{p+1} = \dots = x_n = 0$  par la Fig. 3:

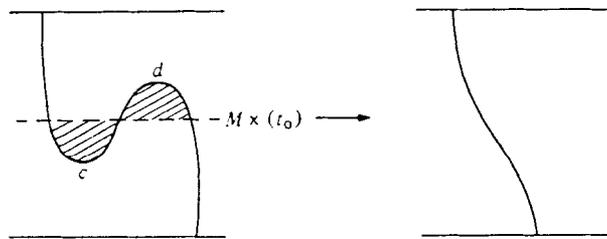


Fig. 2.

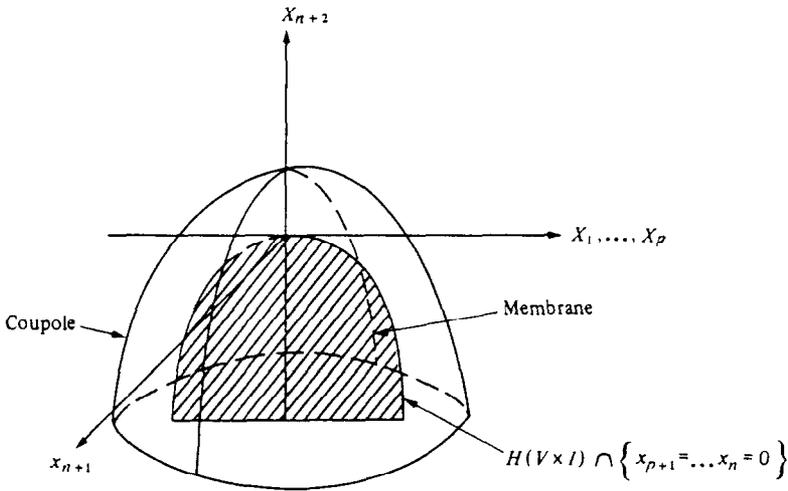


Fig. 3.

(7) (a) On peut faire la somme connexe d'une membrane d'un point critique  $d$  avec la membrane d'un point critique de même indice à un niveau inférieur ([12], chap. 3, §2) (Fig. 4).

(b) On peut faire la somme connexe de la membrane d'un point critique avec la coupole d'un point critique de même indice situé à un niveau inférieur ([12] chap. 3, §2) (Fig. 5).

(8) Soit  $(V^n, V_0, V_1) \rightarrow (M^{n+2} \times [0, 1], 0, 1)$  un plongement à fibré normal trivial tel que la projection  $p|V \rightarrow I$  n'ait qu'un point critique de Morse d'indice  $i$ , de membrane descendante  $\mathcal{D}$ .

Alors le complémentaire  $M \times I - (V \times \dot{D}^2)$  est obtenue de  $M \times \{0\} - (V_0 \times \dot{D}^2)$  en lui attachant une anse d'indice  $i + 1$  dont l'âme est la coupole associée à  $\mathcal{D}$ .

**COROLLAIRE 2.5.** *Le plongement  $C^\infty, H|V \times I \rightarrow [(M - \{p_0\}) \times I]_\theta$  du lemme 2.1 est  $C^\infty$  isotope à un plongement  $K: V \times I \rightarrow (M - \{p_0\}) \times I$  tel que  $p \circ K$  soit une fonction de Morse ordonnée excellente (les valeurs critiques sont simples).*

*Démonstration.* Soient  $a$  et  $b$  deux points critiques de  $p \circ H$  tels que  $p \circ H(a) < p \circ H(b)$  et  $i = \text{indice}(a) \geq \text{indice}(b) = j$ . D'après le lemme 2.4, l'une des deux membranes descendante de  $b$  et ascendante de  $a$  est  $C^\infty$ . On fait glisser de façon  $C^\infty$  (propriété (1) des membranes) le point correspondant jusqu'à un niveau où l'autre est  $C^\infty$ . Dans ce niveau, par transversalité  $C^\infty$ , les membranes sont disjointes (la dimension de la projection de la membrane

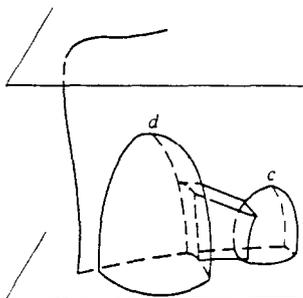


Fig. 4.

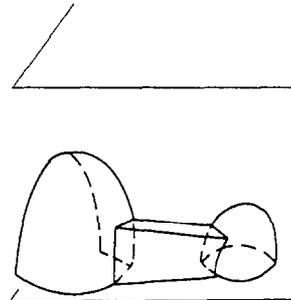


Fig. 5.

descendante (resp. ascendante) de  $b$  (resp.  $a$ ) est  $j$  (resp.  $3 - i$ ). On applique alors la propriété (2) des membranes.

**§3. SUPPRESSION DES POINTS CRITIQUES D'INDICE 0 ET 3 (POUR L'APPLICATION  $p \circ K$  DU COROLLAIRE 2.5)**

Soit  $\mathcal{C}$  l'espace des fonctions différentiables  $f: V^n \times (I, 0, 1) \rightarrow (I, 0, 1)$  telles que  $f^{-1}(i) = V^n \times \{i\}$ ,  $i = 0, 1$ . Soit  $\mathcal{C}^0$  le sous-ensemble de  $\mathcal{C}$  des fonctions de Morse ordonnées excellentes.  $\mathcal{C}_\alpha^1$  désigne le sous-espace des fonctions ordonnées excellentes à ceci près qu'elles ont un point critique  $c$  de type naissance  $(-x_1^2 - \dots - x_i^2 + x_{i+1}^2 \dots + x_n^2 + x_{n+1}^2)$  et la variété de niveau de  $c$  sépare les points critiques d'indice  $i$  et  $i + 1$ . Enfin  $\mathcal{C}_\beta^1$  désigne les fonctions ordonnées excellentes à ceci près que deux points critiques de même indice sont au même niveau. On pose  $\mathcal{C}^1 = \mathcal{C}_\alpha^1 \cup \mathcal{C}_\beta^1$  (voir [3]).

**LEMME 3.1.** *Deux fonctions  $f_0, f_1 \in \mathcal{C}^0$  peuvent être jointes par un chemin  $f_t \in \mathcal{C}^0 \cup \mathcal{C}^1$  dont le graphique (au sens de [3]) est du type (Fig. 6): c'est à dire que les accidents du graphique se présentent dans l'ordre suivant: naissance de paires de points critiques, croisements de points critiques de même indice, mort de paires de points critiques.*

*Démonstration.* Elle se fait simplement en utilisant le lemme du bec ([3], chap. IV, §3) le lemme des singularités indépendantes [3] et la possibilité de changer le graphique suivant sans changer les extrémités (Fig. 7).

**COROLLAIRE 3.2.** *Soient  $K: V^2 \times I \rightarrow (M - \{p_0\}) \times I$  la pseudo-isotopie donnée par le corollaire 2.5 et soit  $f_t: V^2 \times I \rightarrow I$  un chemin dans  $\mathcal{C}^1$  joignant  $p \circ K = f_0$  à la projection  $p$ , donné par le lemme 3.1, de graphique (Fig. 8): (où  $t_1$  désigne une valeur du paramètre telle que sur  $[t_1, 1]$  le graphique ne présente que des morts).*

*Alors il existe une isotopie de plongements  $C^\infty$ ,  $K_t = V^2 \times I \rightarrow [(M - \{p_0\}) \times I]_\theta$ ,  $t \in [0, t_1]$ , telle que  $K_0 = K$  et  $p \circ K_t$ , a, pour  $t \in [0, t_1]$ , le même graphique que  $f_t$ .*

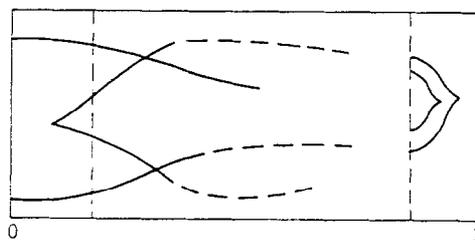


Fig. 6.

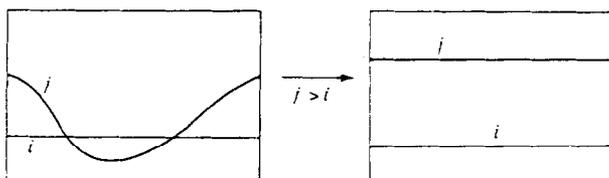


Fig. 7.

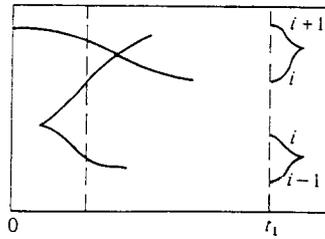


Fig. 8.

*Démonstration.* Il suffit de voir que les accidents du graphique peuvent être réalisés par des isotopies ambiantes  $C^\infty$ . C'est clair pour les naissances ainsi que pour les croisements (propriété (1) des membranes et lemme 2.4).

Notons  $\tilde{K} = K_{t_1} : V \times I \rightarrow [(M - \{p_0\}) \times I]_\theta$  la pseudo-isotopie  $C^\infty$  donnée par le corollaire 3.2. Elle est telle que  $p \circ \tilde{K}$  est une fonction de Morse ordonnée excellente dont les points critiques sont groupés par paires se détruisant mutuellement.

Notons  $M_{i+1} = M \times \{t_{i+1}\}$  (resp.  $V_{i+1} = \tilde{K}(V \times I) \cap M_{i+1}$ ) un niveau intermédiaire entre les points critiques d'indice  $i$  et  $i + 1$ .

D'après le corollaire 3.2 et le critère de Smale ([3] prop. 3, §2 chap. III) on peut trouver, pour les points critiques d'indice  $i$  ( $i = 0, 1, 2, 3$ ), un système de membranes ascendantes  $\mathcal{A}_j^i$  (resp. descendantes  $\mathcal{D}_j^i$ ) jusqu'au niveau  $M_{i+1}$  (resp.  $M_i$ ) vérifiant les propriétés des lemmes 2.3 et 2.4 et la

*Propriété (\*).* Dans le niveau  $V_{i+1}$ , les nappes  $A_j^i$  ( $= \mathcal{A}_j^i \cap \tilde{K}(V \times I)$ ) sont disjointes des nappes  $D_k^{i+1}$  ( $= \mathcal{D}_k^{i+1} \cap \tilde{K}(V \times I)$ ) sauf pour celles qui correspondent à des points critiques se détruisant mutuellement auquel cas elles se coupent transversalement en un point dans  $V_{i+1}$ .

LEMME 3.3.  $\tilde{K} : V \times I \rightarrow [(M - \{p_0\}) \times I]_\theta$  est  $C^\infty$ -isotope à un plongement  $L$  tel que  $p \circ L$  n'a que des points critiques d'indice 1 et 2 groupés par paires se détruisant mutuellement. Plus précisément, on peut supposer que la propriété (\*) ci-dessus est conservée.

*Démonstration.* Reprenant les idées de Smale dans la démonstration du théorème du  $h$ -cobordisme, on va démontrer qu'on peut remplacer les paires  $>_0^1$  par des paires  $>_1^2$ . Par dualité on supprimera les paires  $>_2^3$ .

On peut supposer que les niveaux  $M_1$  et  $M_2$  sont tels que les membranes des points critiques d'indice 0 et 1 jusqu'à ces niveaux soient  $C^\infty$ . En effet soit  $M'_1$  un niveau en dessous de tous les points critiques d'indice 0. On fait descendre ces points critiques le long de leur membrane ( $C^\infty$  d'après le lemme 2.4) un peu en dessous de  $M'_1$ . D'après le lemme 2.3 les membranes ascendantes jusqu'à  $M'_1$  sont  $C^\infty$ . On procède de la même façon pour les points critiques d'indice 1.

Notons  $(c_1, d_1), \dots, (c_i, d_i)$  les paires de points critique d'indice respectif 0, 1 se détruisant mutuellement,  $\{\mathcal{A}_i^0\}$  (resp.  $\{\mathcal{D}_i^1\}$ ) les membranes ascendantes (resp. descendantes) des points  $c_i$  (resp.  $d_i$ ) jusqu'au niveau  $M_1$ ,  $\{\tilde{\mathcal{A}}_i^0\}$  (resp.  $\{\tilde{\mathcal{D}}_i^1\}$ ) leurs projections sur  $M_1$ . On note encore  $\mathcal{D}_k^1$  les membranes descendantes des points critiques d'indice 1 autre que  $\{d_i\}$  (c'est à dire ceux qui sont tués par des points critiques d'indice 2).

Rappelons que  $V_i = L(V \times I) \cap M_i$ . Alors  $V_i \subset M_i$  se compose d'une variété  $V'_i$  isotope à  $V_0$  ( $= L(V \times I) \cap M \times \{0\}$ ) et de sphères de dimension 2 qui ne sont autres que les  $\partial \tilde{\mathcal{A}}_i^0$ .

La sous-variété  $V_2 \subset M_2$  est obtenue de  $V_1$  en faisant des chirurgies d'indice 1 correspondant aux anses d'indice 1 définies par les projections des membranes  $\tilde{\mathcal{D}}_i^1, \tilde{\mathcal{D}}_k^1$ . D'après la propriété (\*) ci-dessus, chaque projection  $\partial \tilde{\mathcal{A}}_i^0$  est jointe à  $V_1$  par exactement une projection  $\partial \tilde{\mathcal{D}}_i^1$  (Fig. 9). Notons  $a_i$  (resp.  $b_i$ ) l'extrémité de  $\tilde{\mathcal{D}}_i^1$  dans  $\partial \tilde{\mathcal{A}}_i^0$  (resp.  $V_1$ ). Soit  $\alpha_i$  un chemin dans  $M_1 - V_1 - \bigcup_i \tilde{\mathcal{A}}_i^0 - \bigcup_i \tilde{\mathcal{D}}_i^1 - \bigcup_i \tilde{\mathcal{D}}_k^1$  joignant  $a_i$  à  $b_i$ .

D'après les propriétés (3) et (4) des membranes, ce chemin  $\alpha_i$  permet d'introduire un point critique d'indice 1 se détruisant avec  $c_i$ . Ce chemin  $\alpha_i$  étant disjoint des projections  $\tilde{\mathcal{D}}_i^1, \tilde{\mathcal{D}}_k^1$  apparait au niveau  $M_2$ . Notons  $\beta_i$  le lacet  $\tilde{\mathcal{D}}_i^1 \cup \alpha_i$  dans  $M_2$  où  $\tilde{\mathcal{D}}_i^1$  est un chemin parallèle à  $\tilde{\mathcal{D}}_i^1$  dans le bord d'un épaississement de  $\tilde{\mathcal{D}}_i^1$  (Fig. 9). En poussant  $\beta_i$  dans  $M_2 - V_2$  le long d'un champ de vecteurs normal à  $V_2$ ,  $\beta_i$  représente un élément de  $\pi_1(M_2 - V_2)$ .

En utilisant la propriété (8) des membranes et en remarquant que  $\pi_1(M - V_0) \simeq \pi_1(B^4) = 0$ , on voit facilement que  $\pi_1(M_2 - V_2) = 0$ .

On peut donc trouver des immersions  $C^\infty, \varphi_i: D^2 \rightarrow M_2^4$  telles que:

- (1)  $\varphi_i|_{\partial D}$  est un plongement et  $\varphi_i(\partial D) = \beta_i$
- (2)  $\varphi_i$  rencontre  $V_2$  transversalement exactement le long de  $\varphi_i(\partial D)$
- (3)  $\varphi_i$  n'a que des points doubles  $\{m_i^j\}$  où deux branches se coupent transversalement
- (4)  $\varphi_i$  et  $\varphi_j$  se coupent transversalement.

Notons  $(p_i^j, q_i^j) = \varphi_i^{-1}(m_i^j), \{r_h^i\} = \varphi_i^{-1}(\varphi_i(D^2) \cap \left(\bigcup_{i \neq j} \varphi_j(D^2)\right))$ ,

$$\alpha'_i = \varphi_i^{-1}(\alpha_i) \subset \partial D^2; \quad \gamma_i = \varphi_i^{-1}(\tilde{\mathcal{D}}_i^1) \subset \partial D^2.$$

Considérons dans  $D^2$  des chemins  $v$  disjoints, joignant les points  $p_i^j, q_i^j, r_h^i$  à des points de  $\alpha'_i$  tels que  $\varphi_i(v)$  soient disjoints des membranes ascendantes des points critiques d'indice 1, ce qui veut dire que l'image de ces chemins  $v$  apparait au niveau  $M_1$ . Considérons le nouveau chemin  $\alpha''_i$  obtenu de  $\alpha'_i$  en poussant des "doigts" le long des chemins  $v$  (Fig. 10) et  $D_i^2$  le disque  $D^2$  auquel on retire ces doigts. On pose  $\tilde{\alpha}_i = \varphi_i(\alpha''_i)$  et  $\Delta_i = \varphi_i(D_i^2)$ .

On a alors les propriétés suivantes:

(a)  $\tilde{\alpha}_i$ , vu dans  $M_1$ , est un chemin dans  $M_1 - V_1$  joignant  $V_1$  à  $\partial \tilde{\mathcal{A}}_i^0$ , isotope dans  $M_1 - V_1 - \partial \tilde{\mathcal{A}}_i^0 - \bigcup_i \tilde{\mathcal{D}}_i^1 - \bigcup_k \tilde{\mathcal{D}}_k^1$  au chemin  $\alpha_i$ , la trace de l'isotopie étant donnée par l'image des doigts. Le point critique d'indice 1 défini par  $\tilde{\alpha}_i$  (propriété 3 des membranes) se détruit donc mutuellement avec le point critique d'indice 0 correspondant à  $\tilde{\mathcal{A}}_i^0$  (propriété 4 des membranes).

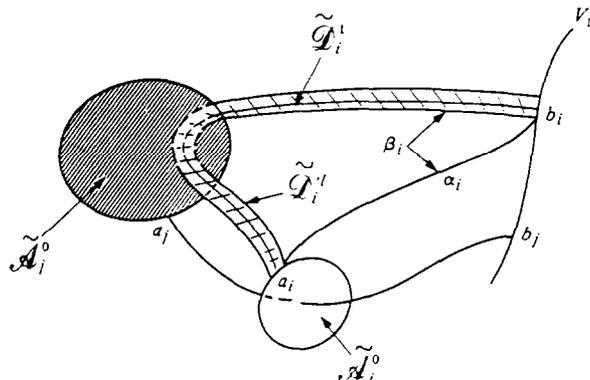


Fig. 9.

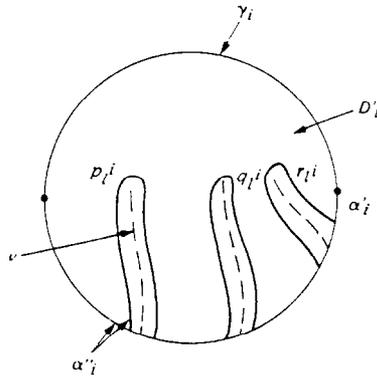


Fig. 10.

(b) Le 2-disque plongé  $\Delta_i$  bordé par  $\tilde{\beta}_i = \tilde{\alpha}_i \cup \varphi_i(\gamma_i)$  défini un point critique d'indice 2 se détruisant avec le point critique d'indice 1 défini par  $\tilde{\alpha}_i$ . Le bord  $\partial\Delta_i$  coupe transversalement en un point exactement la nappe descendante du point critique d'indice 1 correspondant à la membrane  $\tilde{\mathcal{D}}_i^1$  (par construction) et ne coupe pas celle correspondant aux autres points critiques d'indice 1.

Le lemme en résulte.

§4. DISJONCTION DES MEMBRANES

Soient  $L: V \times I \rightarrow [(M - \{p_0\}) \times I]_\theta$  le plongement  $C^\infty$  donné par le lemme 3.3 et  $(a_i)$  (resp.  $(b_i)$ ) les points critiques d'indice 1 (resp. 2) de  $p \circ L$ . En procédant comme au début de la démonstration du lemme 3.3, on peut supposer que les niveaux des  $(a_i)$  sont proches et en dessous d'un niveau  $M \times \{t_2\}$  et qu'il existe un système de membranes ascendantes  $\mathcal{A}_i$  (resp. descendante  $\mathcal{D}_j$ ) jusqu'au niveau  $M \times \{t_2\}$  pour  $\{a_i\}$  (resp.  $b_i$ ) telles que:

- (1) les membranes  $\mathcal{A}_i$  sont  $C^\infty$ ;
- (2) les membranes  $\mathcal{D}_j$  sont  $C^\infty$  au voisinage de  $L(V \times I)$  et les bords des projections  $\partial \tilde{\mathcal{A}}_i, \partial \tilde{\mathcal{D}}_j$  vérifient la propriété (\*).

Le but de ce paragraphe est de démontrer le

LEMME 4.1. *Il existe un système de membranes vérifiant les propriétés (1) et (2) ci-dessus dont les intérieurs des projections sont disjoints.*

Notons  $N_2$  un (petit) voisinage tubulaire  $C^\infty$  (pour  $\Theta$ ) de

$$V_{t_2} = (M - \{p_0\}) \times \{t_2\} \cap L(V \times I), \quad \tilde{M} = \overline{(M \times \{t_2\}) - N_2} - \{p_0\},$$

$$\tilde{\mathcal{A}}'_i = \overline{\mathcal{A}_i - N_2}, \quad \tilde{\mathcal{D}}'_j = \overline{\mathcal{D}_j - N_2}.$$

Pour démontrer le lemme 4.1, on va appliquer le théorème de disjonction de Casson-Freedmann ([2], théorème 10.1 de [5], théorème 3 de [17]) à la variété ambiante  $\tilde{M}$  et aux sous-variétés  $\tilde{\mathcal{A}}'_i, \tilde{\mathcal{D}}'_j$ . Ce théorème est valable dans la catégorie  $C^\infty$ : on va donc démontrer (lemme 4.2) qu'il existe une structure différentiable sur  $M - \{p_0\}$  rendant les sous-variétés  $V_{t_2}, \mathcal{A}_i, \mathcal{D}_j$  différentiables. Il restera à vérifier les autres hypothèses du théorème de disjonction, à savoir la  $\pi_1$ -négligeabilité des familles  $\tilde{\mathcal{A}}'_i, \tilde{\mathcal{D}}'_j$  et l'existence de 2-sphères immergées duales particulières.

(a) Structure différentiable sur  $M - \{p_0\}$

L'objectif de ce sous-paragraph est de démontrer le

LEMME 4.2. Il existe une structure différentiable  $\Gamma$  sur  $M - \{p_0\}$  coïncidant avec  $\theta$  au voisinage de  $V_{t_2}$ , telle que  $V_{t_2}$ ,  $\tilde{\mathcal{A}}_i$ ,  $\tilde{\mathcal{D}}_j$  soit des sous-variétés  $C^\infty$ .

Les membranes étant modélisées, il existe pour tout  $j$ , un plongement (topologique)  $\varphi_j: (D^2, \partial) \times R^2 \rightarrow (M - \{p_0\}, V_{t_2})$ , différentiable (pour  $\theta$ ) sur  $\varphi_j^{-1}(N_2)$ , tel que  $\varphi_j(D_2 \times \{0\}) = \tilde{\mathcal{D}}_j$  (il suffit de prendre  $N_2$  assez petit et d'utiliser le lemme 2.3).

LEMME 4.3. Après une isotopie lisse de  $\tilde{\mathcal{A}}_i$  fixe sur  $\tilde{\mathcal{A}}_i \cap N_2$  et une isotopie (topologique) de  $\tilde{\mathcal{D}}_j$  de support dans  $M - \{p_0\} - N_2$ , on peut supposer que les points d'intersection de  $\tilde{\mathcal{D}}_j$  et  $\tilde{\mathcal{A}}_i$  sont dans  $N_2$  (Fig. 11) où tout est lisse (pour  $\theta$ ).

Démonstration. D'après le théorème 2.2.2. de [13],  $\varphi_j$  est  $C^\infty$  (pour  $\theta$ ) au voisinage de  $\hat{D} \subset D^2 \times R^2$  où  $\hat{D}$  est obtenu de  $D^2 \times \{0\}$  en introduisant des paires de points de self-intersection (déformations de Casson [2] et Fig. 12). Ces paires de points apparaissent avec des disques de Whitney  $C^\infty$ , notés  $\{W_j^k\}$  contenus dans  $D^2 \times R^2 - \varphi_j^{-1}(N_2)$ .

On notera  $\hat{\Delta}_j = \varphi_j(\hat{D})$  (on peut supposer que  $\hat{\Delta}_j \cap N_2 = \tilde{\mathcal{D}}_j \cap N_2$ ).

D'après la proposition 2.2.4 de [13] (voir aussi la démonstration du théorème 2.4.1 de [13]), dans un petit voisinage de  $\varphi_j(W_j^k)$  (homéomorphe à  $\varphi_j(W_j^k) \times R^2$ ), on peut mettre une tour de Whitney à 5 étages  $\mathcal{C}_j^k$ , différentiable pour  $\Theta$ , et dans celle-ci une anse de Casson  $CH_j^k$  différentiable (voir [5], §2 pour la définition), homéomorphe à  $D^2 \times R^2$  ([5], théorème 1.1), faiblement dénouée dans le voisinage  $\varphi(W_j^k) \times R^2$  (proposition 2.2.4 et démonstration de 2.4.1 de [13]). Cela veut dire que le coeur  $D^2 \times \{0\}$  de  $CH_j^k$  est (topologiquement) isotope modulo le bord à  $\varphi(W_j^k) \times \{0\}$ .

On peut disjointement différentiablement  $\tilde{\mathcal{A}}_i$  des tours  $\mathcal{C}_j^k$  (démonstration du théorème 2.4.1 de [13]) quitte à introduire des points d'intersection supplémentaires avec  $\hat{\Delta}_j$ . Par une isotopie  $C^\infty$  de  $\tilde{\mathcal{A}}_i$ , disjointe de  $\{\mathcal{C}_j^k\}$ , on peut pousser les points d'intersections de  $\tilde{\mathcal{A}}_i$  et  $\hat{\Delta}_j$  dans  $N_2$ : pour cela il suffit de prendre des chemins  $C^\infty$  dans  $\hat{\Delta}_j$ , disjoints, disjoints des tours  $\mathcal{C}_j^k$ , joignant les points  $\hat{\Delta}_j \cap \tilde{\mathcal{A}}_i$  à des points de  $N_2$  et de déformer  $\tilde{\mathcal{A}}_i$  le long de ces chemins.

Puis on fait des isotopies topologiques sur  $\hat{\Delta}_j$  (démonstration de 2.4.1 de [13]) dans les anses de Casson  $CH_j^k$  pour supprimer les points de self-intersection de  $\hat{\Delta}_j$ . La famille de disques résultants  $\{\Delta_j\}$  est isotope topologiquement dans  $M - N_2 - \{p_0\}$  à la famille  $\{\tilde{\mathcal{D}}_j\}$  ( $CH_j^k$  est faiblement dénouée). Ainsi  $\{\Delta_j\}$  admet un fibré normal topologique,  $C^\infty$  sur  $N_2$  (puisqu'il en est ainsi pour  $\tilde{\mathcal{D}}_j$ ).

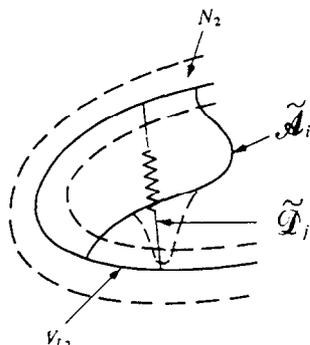


Fig. 11.

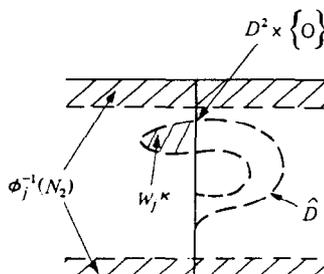


Fig.12.

On termine la démonstration du lemme 4.2 de la façon suivante: soit  $\mathcal{N}_1$  un voisinage tubulaire  $C^\infty$  trivial de  $\bigcup_i \tilde{\mathcal{A}}_i$ ,  $\mathcal{N}_2$  un voisinage tubulaire (topologique) de  $\bigcup_j \Delta_j$ ,  $C^\infty$  sur  $N_2$  (qui existe d'après ce qui précède). Au voisinage d'un point d'intersection  $p$  transverse de deux des trois variétés  $\tilde{\mathcal{A}} = \bigcup_i \tilde{\mathcal{A}}_i$ ,  $\Delta = \bigcup_j \Delta_j$ ,  $V_{t_2}$ , on peut supposer que le modèle de l'intersection des voisinages tubulaires est  $B^2 \times B^2$  ( $B^2$  est la boule de dimension 2), le point  $p$ , les deux variétés et les fibres des voisinages tubulaires correspondant respectivement à  $\{0\} \times \{0\}$ ,  $B^2 \times \{0\} \cup \{0\} \times B^2$ , et aux facteurs horizontaux et verticaux. C'est vrai du fait que au voisinage des points d'intersection tout est  $C^\infty$ .

Chacun des voisinages tubulaires étant trivial, le sous-espace  $N_2 \cup \mathcal{N}_1 \cup \mathcal{N}_2$  a une structure  $C^\infty$  naturelle  $\Gamma_1$  induite par celle de  $V_{t_2}$ ,  $\tilde{\mathcal{A}}$  et  $\Delta$ . Soit  $W = M - \{p_0\} - \text{int}(N_2 \cup \mathcal{N}_1 \cup \mathcal{N}_2)$  (int pour intérieur). Le bord  $\partial W$ , de dimension 3, a une structure  $C^\infty$  unique [11], qui s'étend par [13] (corollaire 2.2.3) en une structure différentiable  $\Gamma_W$  sur  $W$ . Alors  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_W$  définit une structure différentiable sur  $(M - \{p_0\}) \times \{t_2\}$  pour laquelle  $V_{t_2}$ ,  $\tilde{\mathcal{A}}$  et  $\Delta$  sont des sous-variétés  $C^\infty$ .

On continuera de noter dans la suite  $\Delta_j$  par  $\tilde{\mathcal{D}}_j$ .

(b)  $\pi_1$ -négligeabilité des familles  $\{\tilde{\mathcal{A}}'_i\}$ ,  $\{\tilde{\mathcal{D}}'_j\}$

Rappelons qu'on a posé  $\tilde{\mathcal{A}}'_i = \overline{\tilde{\mathcal{A}}_i - N_2}$ ,  $\tilde{\mathcal{D}}'_j = \overline{\tilde{\mathcal{D}}_j - N_2}$  et  $\tilde{M} = \overline{M - N_2} - \{p_0\}$ .

LEMME 4.4. *Les deux familles  $\{\tilde{\mathcal{A}}'_i\}$ ,  $\{\tilde{\mathcal{D}}'_j\}$  sont  $\pi_1$ -négligeables dans  $\tilde{M}$ , c'est à dire que  $\pi_1(\tilde{M} - \bigcup_i \tilde{\mathcal{A}}'_i) = \pi_1(\tilde{M} - \bigcup_j \tilde{\mathcal{D}}'_j) = 0$ .*

*Démonstration.* On construit un feuilletage topologique en ligne  $\mathcal{F}$  (champ de trajectoires au sens de [7], essay III, §3; voir aussi [16]) sur  $M \times [0, t_2]$  dont les seules singularités sont les points critiques de  $p \circ L$ , tel que:

(a)  $\mathcal{F}$  est transverse aux niveaux  $M \times \{t\}$ ,  $t \in [0, t_2]$ ;

(b)  $\mathcal{F}$  est tangent à  $L(V \times I)$  et aux membranes ascendantes et descendantes des points critiques.

On construit un tel champ de la façon suivante: dans une carte compacte  $B^4 \times [-\varepsilon, \varepsilon]$  autour d'un point critique donnée par le lemme 2.1 où  $p$  et  $L$  s'écrivent:  $p(x, y, z, s, t) = t$ ,  $L(x, y, z) = (x, y, z, 0, \varepsilon_1 x^2 + \varepsilon_2 y^2 + \varepsilon_3 z^2)$ , on peut trouver un champ  $C^\infty$ ,  $\chi$ , tangent au bord latéral  $\partial B \times [-\varepsilon, \varepsilon]$  vérifiant les propriétés (a) et (b) ci-dessus et coïncidant avec le champ  $\xi$  donné dans la démonstration du lemme 2.3 au voisinage de 0. On étend ce champ  $\chi$  (topologiquement) à  $M \times [0, t_2]$  à l'aide du théorème d'extension de l'isotopie topologique [4].

On peut supposer, de plus, que  $\{p_0\} \times I$  est une feuille de  $\mathcal{F}$ .

Ce feuilletage  $\mathcal{F}$  définit un homéomorphisme de  $(M - \{p_0\}) - L(V \times (0)) - \bigcup_i \tilde{\mathcal{A}}_i \times \{0\}$  sur  $(M - \{p_0\}) - V_{t_2} - \bigcup_i \tilde{\mathcal{A}}_i \times \{t_2\}$ , où  $\{\tilde{\mathcal{A}}_i\}$  désigne les projections des membranes descendantes des points critiques d'indice 1 sur  $M \times \{0\}$ . Du fait que  $\dim(\tilde{\mathcal{A}}_i) = 1$ , on a des isomorphismes:

$$\pi_1(M - \{p_0\} - L(V \times \{0\}) - \bigcup_i \tilde{\mathcal{A}}_i) = \pi_1(M - \{p_0\} - L(V \times \{0\})) \simeq \pi_1(B^4 - \{p_0\}) = 0.$$

D'autre part il n'est pas difficile de voir que

$$\pi_1((M - \{p_0\}) - V_{t_2} - \bigcup_i \tilde{\mathcal{A}}_i \times \{t_2\}) \simeq \pi_1(\tilde{M} - \bigcup_i \tilde{\mathcal{A}}'_i).$$

Le lemme en résulte (pour obtenir le résultat pour  $\tilde{\mathcal{D}}'_j$  il suffit de renverser le cobordisme  $M \times [0, 1]$ ).

(c) Existence de 2-sphères duales

LEMME 4.5. Il existe des 2-sphères  $C^\infty$  immergées dans  $\tilde{M}$  (pour la structure  $\Gamma$  du lemme 4.2)  $\mathcal{C}_i^a, \mathcal{C}_j^d$  telles que:

- (1)  $\tilde{\mathcal{A}}'_i \cdot \mathcal{C}_j^d = \tilde{\mathcal{D}}'_j \cdot \mathcal{C}_i^a = \delta_{ij}$
- (2)  $\tilde{\mathcal{D}}'_j \cdot \mathcal{C}_i^d = \tilde{\mathcal{A}}'_i \cdot \mathcal{C}_j^a = 0$

pour tout couple  $(i, j)$ , où  $(\cdot)$  désigne le nombre d'intersection algébrique.

Démonstration. Il suffit de prendre pour  $\mathcal{C}_j^d$  (resp.  $\mathcal{C}_i^a$ ) le bord de la coupole associée à la membrane  $\tilde{\mathcal{D}}_j$  (resp.  $\tilde{\mathcal{A}}_i$ ).

Le calcul des nombres d'intersection algébriques résulte de la propriété  $(\star)$  suivant le corollaire 3.2 et du fait que tout point d'intersection de  $\tilde{\mathcal{A}}_i$  avec  $\tilde{\mathcal{D}}_j$  donne naissance à deux points d'intersection avec nombres d'intersection opposés pour  $\tilde{\mathcal{A}}_i$  et  $\mathcal{C}_j^d$  (resp.  $\tilde{\mathcal{D}}_j$  et  $\mathcal{C}_i^a$ ) (Fig. 13).

(d) Le théorème de disjonction de Casson-Freedmann

THÉORÈME 4.6 ([5] théorème 10.1, [17]). Soit  $X$  une surface normalement immergée d'une variété  $C^\infty$  orientée  $\tilde{M}$  de dimension quatre telle que:

(a)  $\pi_1(\tilde{M} - X) = 0$

(b) Pour chaque composante connexe  $X_i$  de  $X$ , il existe une 2-sphère immergée  $T_i$  transverse à  $X$  telle que  $T_i \cap X_j = \delta_{ij}$  et  $T_i \cdot T_i \in 2\mathbb{Z}$ .

Soit  $\bar{v}$  un lacet de Whitney couplant deux points doubles  $(p, q)$  de  $X$  avec nombres d'intersection opposés. Alors il existe une tour de Whitney à 6 étages  $(T_6, \partial^- T_6)$  (voir [5], §2), attachée le long de  $\bar{v} \subset \partial \eta(X)$ , avec  $(T_6, \partial^- T_6) \subset (\tilde{M} - \eta(X), \partial \eta(X))$ , où  $\eta(X)$  est un voisinage tubulaire de  $X$  dans  $\tilde{M}$ . De plus  $\pi_1(\tilde{M} - \eta(X) - T_6) = 0$ .

(e) Démonstration du Lemme 4.1

D'après le lemme 4.4, les 2-sphères  $\mathcal{C}_i^a, \mathcal{C}_j^d$  données par le lemme 4.5 sont régulièrement homotopes dans  $\tilde{M}$  à des 2-sphères géométriquement duales respectivement pour  $\tilde{\mathcal{D}}'_i$  et  $\tilde{\mathcal{A}}'_j$  (c'est à dire que  $\tilde{\mathcal{A}}'_i \cap \mathcal{C}_j^d = \tilde{\mathcal{D}}'_j \cap \mathcal{C}_i^a = \delta_{ij}$ ). D'après le lemme 10.1 de [5] dû à Casson, en introduisant de façon  $C^\infty$  des paires de points d'intersection de  $\tilde{\mathcal{A}}'_i$  avec les  $\tilde{\mathcal{D}}'_j$  (déformations de Casson), la nouvelle famille  $\{\tilde{\mathcal{A}}''_i\} \cup \{\tilde{\mathcal{D}}'_j\}$  est  $\pi_1$ -négligeable dans  $\tilde{M}$  (c'est à dire que  $\pi_1(\tilde{M} - \bigcup_i \tilde{\mathcal{A}}''_i - \bigcup_j \tilde{\mathcal{D}}'_j) = 0$ ).

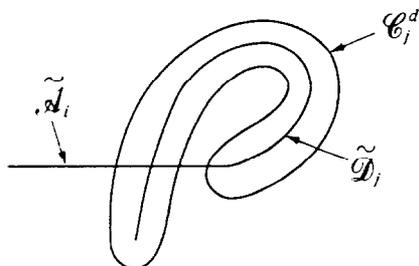


Fig. 13.

D'après les lemmes 4.2 et 4.5 la famille  $\{\tilde{\mathcal{A}}'_i, \tilde{\mathcal{D}}'_j\}$  vérifie les hypothèses du théorème de disjonction 4.6. On peut supposer de plus que pour tout couple  $(i, j)$  le nombre algébrique d'intersection des intérieurs de  $\tilde{\mathcal{A}}'_i$  et  $\tilde{\mathcal{D}}'_j$  est 0. C'est vrai pour  $i = j$  en faisant (éventuellement) pivoter  $\tilde{\mathcal{D}}'_j$  autour du point  $\partial \tilde{\mathcal{A}}'_i \cap \partial \tilde{\mathcal{D}}'_j$ . Pour  $i \neq j$ , il faut éventuellement faire des additions de coupes (propriété 7 du §2) en tenant compte du lemme 4.5. On peut donc grouper les intersections de  $\tilde{\mathcal{A}}'_i$  et  $\tilde{\mathcal{D}}'_j$  par paires ayant des nombres d'intersection opposés. D'après le théorème 4.6 ci-dessus, on peut trouver des tours de Whitney  $T_k^k$ , disjointes, pour chaque paire d'intersection  $(p_k, q_k)$ .

D'après les théorèmes 1.1. et 5.1 de [5] chaque tour  $T_k^k$  contient un modèle de Whitney topologique qui permet de supprimer les intersections de  $\tilde{\mathcal{A}}'_i$  avec  $\tilde{\mathcal{D}}'_j$  par une isotopie (topologique).

**COROLLAIRE 4.7.** *Le plongement  $L: V \times I \rightarrow [(M - \{p_0\}) \times I]_\theta$  du lemme 3.3 est topologiquement isotope au plongement  $L_0 \times id_I$  où  $L_0 = L|_{V \times \{0\}} \rightarrow (M - \{p_0\}) \times \{0\}$ .*

*Démonstration.* D'après le lemme de destruction mutuelle (propriété 4 des membranes) et le lemme 4.1,  $L$  est isotope topologiquement à un plongement  $L_1$  tel que  $p \circ L_1$  soit sans point critique. Le théorème d'extension de l'isotopie topologique montre que  $L$  est isotope à un plongement d'image verticale. Le corollaire en résulte facilement.

**§5. FIN DE DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 0 DANS LE CAS OÙ M N'A QUE DES ANSES D'INDICE 2**

Rappelons qu'on est parti d'une pseudo-isotopie  $F: M \times I \rightarrow M \times I$  telle que  $F|_{\{p_0\} \times I} = id$ , qu'on a isotopé  $F|(M - \{p_0\}) \times I$  à un  $C^\infty$  difféomorphisme  $H: (M - \{p_0\}) \times I \rightarrow [(M - \{p_0\}) \times I]_\theta$  (corollaire 1.3) et que  $H|_{V \times I} \rightarrow [(M - \{p_0\}) \times I]_\theta$  est  $C^\infty$  isotope à un plongement  $L: V \times I \rightarrow [(M - \{p_0\}) \times I]_\theta$  n'ayant que des points critiques d'indice 1 et 2 en position de destruction mutuelle (lemme 4.1). Par le théorème d'extension de l'isotopie  $C^\infty$ , il existe une isotopie différentiable,  $G_t: [(M - \{p_0\}) \times I]_\theta \rightarrow$  telle que:

- (1)  $G_0 = id$ ;  $G_t$  est l'identité sur  $\partial M \times I \cup (M - \{p_0\}) \times \{0\}$  et en dehors d'un compact
- (2)  $G_1 \circ H|_{V \times I} = L$ .

On note  $\varphi$  le  $C^\infty$  difféomorphisme  $G_1 \circ H: (M - \{p_0\}) \times I \rightarrow [(M - \{p_0\}) \times I]_\theta$ .

Soient  $N \simeq V \times D^2$  un voisinage tubulaire  $C^\infty$  de  $V$  dans  $(M - \{p_0\})$ ,  $\mathcal{N} = N \times I$  le voisinage  $C^\infty$  correspondant de  $V \times I$  dans  $[(M - \{p_0\}) \times I]_{\mathbb{Z}_0 \times I}$ ,  $\partial_+ N = V \times \partial D^2$  et  $\partial_+ \mathcal{N} = \partial_+ N \times I$

**LEMME 5.1.**  $\varphi: [(M - \{p_0\}) \times I] \rightarrow [(M - \{p_0\}) \times I]$  est (TOP) isotope mod  $(\partial M \times I \cup (M - \{p_0\}) \times \{0\})$  à un homéomorphisme  $\tilde{\varphi}$  tel que  $\tilde{\varphi}|_{V \times I \cup \partial_+ \mathcal{N}}$  soit l'inclusion.

*Démonstration.* Le plongement  $C^\infty$   $\varphi: V \times I \rightarrow [(M - \{p_0\}) \times I]_\theta$  admet un voisinage tubulaire  $C^\infty$ ,  $E \simeq \varphi(V \times I) \times D^2$  tel que

- (1)  $E \cap [(M - \{p_0\}) \times \{0\}] = N$

(2) les points critiques (de Morse) de  $p|_{\partial_+ E \simeq (V \times I) \times \partial D^2 \rightarrow I}$  sont groupés par couples  $(p_i, q_i)$ , d'indice respectif  $k, k + 1$ , chaque couple correspondant à un point critique d'indice  $k$  de  $p \circ \varphi|_{V \times I}$ . (Fig. 14) (il suffit de le faire dans le modèle donné par le lemme 2.1).

Par le théorème d'unicité des voisinages tubulaires  $C^\infty$ , on peut supposer que  $\varphi(\mathcal{N}) = E$ . D'après le lemme 4.1 les points critiques de  $\varphi|_{V \times I} \rightarrow [(M - \{p_0\}) \times I]_\theta$  se détruisent par paires. On peut s'arranger pour que dans l'isotopie les points critiques de  $p|_{\partial_+ E}$  disparaissent (Fig. 14) (il suffit de la faire dans un modèle). Par le théorème d'extension de

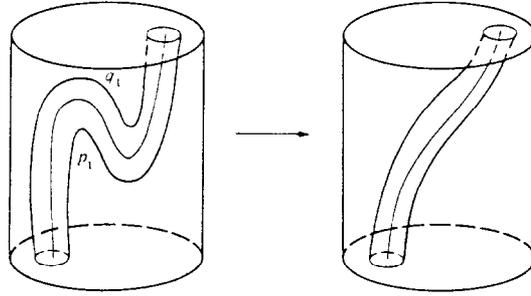


Fig. 14.

l'isotopie topologique [4]  $\varphi|V \times I \cup \partial_+ \mathcal{N}$  est isotope à un plongement dont l'image est verticale. Le lemme en résulte facilement.

LEMME 5.2. *La pseudo-isotopie  $\tilde{\varphi}$  du lemme 5.1 est isotope mod  $\partial M \times I \cup (M - \{p_0\}) \times \{0\} \cup \partial_+ \mathcal{N} \cup V \times I$  à une pseudo-isotopie  $\tilde{\tilde{\varphi}}$  telle que  $\tilde{\tilde{\varphi}}| \mathcal{N}$  est l'inclusion.*

*Démonstration.* Rappelons que par le truc d'Alexander TOP  $(D^n \times D^p, D^n \times \{0\} \cup \partial(D^{n+p}))$  est contractile où TOP  $(,)$  désigne l'espace des homéomorphismes de  $D^n \times D^p$  qui sont l'identité sur  $D^n \times \{0\} \cup \partial(D^{n+p})$ .

L'homéomorphisme  $\tilde{\varphi}_1 = \tilde{\varphi}|(M - \{p_0\}) \times \{1\} \rightarrow (M - \{p_0\}) \times \{1\}$  envoie  $N \times \{1\}$  sur lui-même et est l'identité sur  $\partial N \cup V \times \{1\}$ . En identifiant la paire  $(N \times \{1\}, V \times \{1\})$  avec  $(D^2 \times D^2, D^2 \times \{0\})$  le truc d'Alexander montre qu'on peut supposer  $\tilde{\varphi}_1|N \times \{1\} = id$ .

En identifiant  $(\mathcal{N}, V \times I)$  avec  $(D^2 \times D^2 \times I, D^2 \times \{0\} \times I)$  et en remarquant que  $\tilde{\varphi}$  envoie  $\mathcal{N}$  sur  $\mathcal{N}$ , le truc d'Alexander montre qu'on peut supposer  $\tilde{\varphi}| \mathcal{N} = id$ .

En remarquant que  $M - \dot{N}$  est homéomorphe à la boule  $B^4$ , une nouvelle application du truc d'Alexander montre que la pseudo-isotopie de départ  $F$  est isotope à l'identité.

§6. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 0 EN PRÉSENCE D'ANSES D'INDICES 3 ET 4

On se place dans les hypothèses du paragraphe 0 et on note  $V^{(i)}$  ( $i = 3, 4$ ) l'union des  $(4 - i)$ -disques transverses aux anses d'indice  $i$  de  $M$ . On peut supposer que l'application  $p \circ H|V^{(i)} \times I \rightarrow I$  est une fonction de Morse  $C^\infty$  (où  $H$  est la pseudo-isotopie du corollaire 1.3). Comme dans le §2 on peut attacher à chaque point critique de  $p \circ H|V^{(i)} \times I$  une membrane ascendante (resp. descendante).

*Isotopie à l'inclusion de  $H|V^{(4)} \times I$ .*  $p \circ H|V^{(4)} \times I$  n'a que des points critiques d'indice 0 et 1; on peut démontrer comme dans le lemme 2.4 que toutes les membranes peuvent être choisies  $C^\infty$ . Dans un niveau intermédiaire entre les points critiques d'indice 0 et 1, pour des raisons de dimension, on peut disjointer de façon  $C^\infty$  les membranes des points critiques d'indice 0 et 1. On procède alors comme dans les lemmes 5.1. et 5.2 pour isotoper  $H$  en restriction à un voisinage tubulaire de  $V^{(4)} \times I$  à l'inclusion (on peut utiliser ici le théorème d'unicité du voisinage tubulaire  $C^\infty$  dans la démonstration du lemme 5.1).

*Isotopie à l'inclusion de  $H|V^{(3)} \times I$ .* On montre facilement qu'on peut tuer (de façon  $C^\infty$  pour  $\theta$ ) les points critiques d'indice 0 (voir lemme 3.3). On choisit un niveau un peu en dessous des points critiques d'indice 2 de sorte que les membranes descendantes (resp. ascendantes) des points critiques d'indice 2 (resp. 1) soient  $C^\infty$  (la dimension des projections des membranes ascendantes des points critiques d'indice 1 est un).

On peut alors disjointre de façon  $C^\infty$  dans ce niveau les projections des membranes. On termine comme ci-dessus.

### §7. DÉMONSTRATION DU COROLLAIRE 1

LEMME 7.1. *Soit  $M^4$  une variété vérifiant les hypothèses du corollaire 1. Alors  $M^4$  est homéomorphe à  $W^4 \cup X^4$  où  $W^4$  est obtenu de la boule  $B^4$  en attachant des anses d'indice 2 et  $X^4$  est une variété contractile; de plus  $W \cap X = \partial X = \partial W$  est une 3-sphère d'homologie.*

*Démonstration.* Il est facile de trouver un enlacement  $\mathcal{L}$  et une trivialisation  $\tau$  de son fibré normal dans  $S^3 = \partial B^4$  tel que la variété  $W^4$  obtenue de  $B^4$  en attachant des anses d'indice 2 le long de  $(\mathcal{L}, \tau)$  ait exactement même forme d'intersection que  $M^4$ . D'après ([19] theorem 4.2), on peut choisir  $(\mathcal{L}, \tau)$  de sorte que l'invariant de Rocklin de  $\partial W^4$  dans  $Z/2Z$  (égal à  $\sigma(Y)/8 \pmod{2}$  où  $Y$  est une variété parallélisable bordée par  $\partial W$ ) soit égal à l'obstruction stabilisée de Kirby-Siebenmann à la triangulation de  $M^4$ .

Le bord  $\partial W^4$  étant une sphère d'homologie (à coefficients dans  $Z$ ), borde une variété contractile  $X^4$  ([5] theorem 1.4'). D'après le théorème de classification des variétés de dimension 4 simplement connexes sans bord ([5] theorem 1.5) par la forme d'intersection,  $M^4$  est homéomorphe à  $W^4 \bigcup_{\partial} X^4$  (c'est là qu'on a besoin de la condition sur l'invariant de Rocklin de  $\partial W^4$  quand la forme d'intersection de  $M^4$  n'est pas paire).

LEMME 7.2. *Pour la variété  $M^4 = W^4 \cup X^4$  décrite dans le lemme 7.1, la variété contractile  $X^4$  est contenue dans l'intérieur d'une boule topologique  $B^4 \subset M^4$ .*

*Démonstration.* Soient  $X_1, X'_1$  deux exemplaires de  $X$ ; la variété  $X_1 \bigcup_{\partial} (-X'_1)$  étant une sphère d'homotopie est homéomorphe à la sphère  $S^4$  ([5] theorem 1.4'). Soit  $D^4 \subset \dot{X}_1$  une boule fermée; la somme connexe de  $X^4$  avec  $X_1 \bigcup_{\partial} (-X'_1) \simeq S^4$  définie à l'aide de  $D^4$  est identifiée à  $X^4$ . On a alors les inclusions:

$$X'_1 \subset X_1 \bigcup_{\partial} (-X'_1) - \dot{D} \subset X \subset M$$

où  $X_1 \bigcup_{\partial} (-X'_1) - \dot{D}$  est homéomorphe à une boule de dimension 4. Il est facile de voir qu'il existe une équivalence d'homotopie induisant un difféomorphisme des bords entre  $W^4 = M^4 - \dot{X}$  et  $W'^4 = M^4 - \dot{X}'_1$ . Le théorème du  $h$ -cobordisme de Freedman ([5] theorem 1.3) montre que  $W^4$  et  $W'^4$  sont homéomorphes.

*Fin de démonstration du corollaire 1.* Dans le §6, on a vu qu'on pouvait isotoper toute pseudo-isotopie  $F: M \times I \rightarrow M \times I$  à une pseudo-isotopie qui est l'identité sur  $B^4 \times I$  où  $B^4$  est la boule donnée par le lemme 7.2. La pseudo-isotopie  $F$  est donc l'identité sur  $X^4 \times I \subset B^4 \times I \subset M \times I$ . On est donc ramené à une pseudo-isotopie de  $W \times I$  ( $W = \overline{M - X}$ ) fixe sur  $\partial W \times I \cup W \times \{0\}$ . Le lemme 7.1 et le théorème 0 permettent de conclure.

### BIBLIOGRAPHIE

1. S. AKBULUT and R. KIRBY: Branched coverings of surfaces in 4-manifolds. *Math. Ann.* **252** (1980) 111-131.
2. A. CASSON: Three lectures on new infinite constructions in 4-dimensional manifolds, Notes préparées par L. Guillou. Prépublication Orsay (1980).

3. J. CERF: La stratification naturelle de l'espace des fonctions différentiables. *Publ. I.H.E.S.* No. 39.
4. R. EDWARDS and R. KIRBY: Deformation of spaces of embeddings. *Ann. Math.* **93** (1971), 63–88.
5. M. FREEDMAN: The topology of four-dimensional manifolds. *J. Diff. geom.* **7** (1982), 358–453.
6. J. HARRER: On handlebody structures for hypersurfaces in  $C^3$  and  $CP^3$ . *Math. Ann.* **238** (1978), 51–58.
7. R. KIRBY and L. C. SIEBENMANN: Foundational essays on topological manifolds. *Ann. Math. Stud.* **88** (1977).
8. LÊ DUNG TRANG and B. PERRON: Sur la fibre de Milnor d'une singularité isolée en dimension complexe trois. *C. R. Acad. Sc. Paris* **289** (1979), 115–118.
9. J. A. LEES: Immersions and surgeries of topological manifolds. *Bull. Am. Math. Soc.* **75** (1969), 529–534.
10. R. MANDELBAUM: Four-dimensional topology: an introduction. *Bull. Am. Math. Soc.* **2** (1980), 1–159.
11. E. MOISE: Affine structures on 3-manifolds. *Ann. Math.* **56** (1952), 96–114.
12. B. PERRON: Pseudo-isotopies de plongements en codimension deux. *Bull. Soc. Math. France* **103** (1975), 285–339.
13. F. QUINN: Ends of Maps III: dimension 4 and 5. *J. Diff. Geom.* **7** (1982), 503–521.
14. C. P. ROURKE: Embedded handle theory. *Topology of Manifolds* (Edité par J. Cantrell et C. H. Edwards) 1969.
15. J. SHANESON: Non simply connected surgery. *Comment. Math. Helv.* **45** (1970), 333–352.
16. L. C. SIEBENMANN: Deformation of homéomorphisms on stratified sets. *Comment. Math. Helv.* **47** (1972), 123–163.
17. L. C. SIEBENMANN: Séminaire Bourbaki 1982—Exposé 588.
18. D. SULLIVAN: *Bull. Am. Math. Soc.* **73** (1967), 598–600.
19. S. KAPLAN: Constructing framed 4-manifolds with given almost framed boundaries. *Trans. Am. Math. Soc.* **254** (1979), 237–263.
20. C. MORLET: Automorphismes et plongements de variétés. Cours Peccot, Collège de France. Paris—1969.

*Additif* (Février 1986). Les résultats de cet article ont été annoncés dans une note aux *Compte rendu de l'Académie des sciences* **299** (1984). Depuis, dans un preprint daté de Aout 1985 et intitulé "Isotopy of 4-manifolds", F. Quinn a démontré par des méthodes tout à fait différentes le théorème 0 pour toute variété topologique de dimension 4, 1-connexe.

Il démontre d'autre part le lemme 7.1. pour toute variété 1-connexe de dimension 4, (non nécessairement closes), ce qui fait que les méthodes du présent article permettent de démontrer le théorème 0 pour ces variétés.

*Université de Dijon*

*Département de Mathématiques*

*Labo. de TOPOLOGIE-U.A. 755*

*B.P. 138*

*21004 DIJON Cedex, France.*