Courbes algébriques devoir 1

(1) * *Montrez que les sous-ensembles suivant sont des courbes algébriques affines :*

   (i) $\{(t^3, t^4) \mid t \in \mathbb{R}\}$;

   (ii) $\{r = \sin\theta\}$, en coordinées polar.

   (i) $V(x^4 - y^3) = \{(t^3, t^4) \mid t \in \mathbb{R}\}$.
   (ii) $V(x^2 + y^2 - y)$.
   On dois aussi démonster que les ensembles en question sont égal.

(2) **Décrivez les courbes algébriques dans la droite affine* $\mathbb{A}^1(\mathbb{K})$.
   Les ensembles fini, $\emptyset$ et $\mathbb{A}^1(\mathbb{K})$.

(3) *Donnez l'équation du conique* $x^2-3xy+y^2$ *en utilisant les nouvelles coordonées affines, determinées par les vecteurs* $\{(1,1),(2,-1)\}$ *et le nouveau point d'origine* $(3,2)$.
   Soient X, Y les nouvelles coordonées. Nous avons : $X + 2Y + 3 = x$, $X - Y + 2 = y$. Le conique deviens : $(X+2Y+3)^2 - 3(X+2Y+3)(X - Y + 2) + (X - Y + 2)^2$.

(4) *Calculez le nombre d'intersection* $I_0(ax+by, cx+dy)$ *pour tous* $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. *La reponse sera influencée par le choix des 4 nombre. On vois que le choix de coordonées n'a pas d'importance pour deux courbes de degrée 1.*
   Il faut faire un argumentation qui utilise les cas. On obtiens 1 si $ad-bc \neq 0$ et ∞ si $ad - bc = 0$.

(5) Trouvez les nombres d'intersections $I_O(f,g)$ entre les pairs des courbes suivantes.

   (a) $f(x,y) = xy^4 + y^3 - x^2$ et $g(x,y) = y^5 + x^2 - xy$.

   (b) * $f(x,y) = y^3 - x^3$ et $g(x,y) = y^2 - x^3$.

   (c) $f(x,y) = y - x^3$ et $g(x,y) = y^4 + 6x^3y + x^8$.

   Par example :
   (ii)

$$I_O(y^3-x^3, y^2-x^3) = I_O(y^3-x^3-y^3+x^3y, y^2-x^3) = I_O(x^3(y-1), y^2-x^3)$$

   par $I_O(f,g) = I_O(f+gh, g)$. Puis :

$$I_O(x^3(y-1), y^2 - x^3) = I_O(x^3, y^2 - x^3) + I_O(y - 1, y^2 - x^3).$$

Mais $O \notin V(y-1)$, donc $I_O(y-1, y^2-x^3) = 0$. Alors, on a

$$I_O(x^3, y^2 - x^3) = I_O(x^3, y^2)$$

par $I_O(f,g) = I_O(f, g+fh)$, et puis

$$I_O(x^3, y^2) = 6I_O(x,y) = 6.$$

Nous pouvions aussi calculer l'intersection entre les deux courbes à $[0,0,1]$ dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ en utilisant le resultant. Le point $[1,0,0]$ n'est pas contenu dans $V(F_1) = Y^3 - X^3$ ni $V(F_2) = Y^2Z - X^3$. Le resultant est le déterminant de

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & Y^3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & Y^3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & Y^3 \\ -1 & 0 & 0 & Y^2Z - Y^3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & Y^2Z - Y^3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & Y^2Z - Y^3 \end{pmatrix}$$

qui est égal à $\pm Y^6(Z-Y)^3$ (utilisez les operations de rangées et colonnes afin de simplifier la matrice). Le point $[0,0,1]$ on a $Y=0$ mais $Z - Y \neq 0$. Donc il y a encore une point d'intersection à $[0,0,1]$ de multiplicité 6.

(6) *Combiens des points y a-t-il dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_p)$, où p est un entier premier et $\mathbb{F}_p$ est le corps avec p éléments.*
$|\mathbb{F}_p^3 \setminus \{(0,0)\}| = p^3 - 1$. Puis-que p est premier, l'action de le groupe des element inversible $\mathbb{F}_p \setminus \{0\} = \mathbb{F}_p^*$, qui a $|\mathbb{F}_p^*| = p-1$, est libre. Donc il y a $p^3 - 1/p - 1 = p^2 + p + 1$ classes d'équivalence. On peut aussi le voir en écrivant $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_p)$ comme ci :

$$\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_p) = \{[1,x,y] \,|\, x,y \in \mathbb{F}_p\} \cup \{[0,x,y] \,|\, [x,y] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{F}_p)\}$$

$$= \{[1,x,y] \,|\, x,y \in \mathbb{F}_p\} \cup \{[0,1,y] \,|\, y \in \mathbb{F}_p\} \cup \{[0,0,1]\}.$$

(7) *Est-ce que les droites affines $-2x+4y = 1$ et $x - 2y + 3 = 0$ s'intersect ? Quelles sont les courbes projectifs qui correspond, est-ce que les courbes projectifs s'intersect, et si-oui, où ?*
Non. Oui, à $[2,1,0]$.

(8) *Trouvez les formes homogènes des polynômes :*

(i) $y^2 - 3xy + 5x - 2y - 21$

(ii) $x^4 + 3x^2y - 4y^4 + 5y^3 + y^2 + 2x + 6$.

(i) $Y^2 - 3XY + 5XZ - 2YZ - 21Z^2$.

(ii) $X^4 + 3X^2YZ - 4Y^4 + 5Y^3Z + Y^2Z^2 + 2XZ^3 + 6Z^4$.

(9) **Donnez un élément de $PGL(2, \mathbb{R})$ qui envois les quatre points*

$$\{[1,0,0],[0,1,0],[0,0,1],[1,1,1]\}$$

dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ à les quatre points

$$\{[0,2,1],[1,2,-1],[0,1,0],[1,3,2]\}.$$

Rappelez-vous qu'on peut multiplier un triple par un élément $\lambda \in \mathbb{R}$ sans modifier le point representé par le triple.

$$\begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ 2a & 2b & c \\ a & -b & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

implique que $b = 1, a = 3, c = -5$. On peut bien sur multiplier la matrice complete par $\lambda \neq 0$.

(10) (a) *Soit F et G les polynômes homogènes de degrés r, s dans $\mathbb{K}[X,Y,Z]$. Montrez que FG est aussi un polynôme homogène.*

*(b) * Montrez que chaque les facteur d'un polynôme homogène dans $\mathbb{K}[X,Y,Z]$ est aussi un polynôme homogène.*

(a) Si $\deg F = n$ et $\deg G = m$, chaque term de FG et de degrée $n+m$.

(b) Soit $F \neq 0$ un polynôme homogène. Si $F = GH$, soit $G = \sum_{a \leq i \leq b} g_{(i)}$ et $H = \sum_{c \leq j \leq d} h_{(j)}$, où $g_{(i)}$ est le partie homogène de G de degrée i, $h_{(j)}$ est le partie homogène de H de degrée j, et $0 \leq a$, $0 \leq c$. Nous pouvions choisir a, b, c, d tels que $g_{(a)}, g_{(b)}, h_{(a)}, h_{(b)} \neq 0$. Nous avons :

$$F = GH = \sum_k \sum_{a \leq i \leq b, c \leq j \leq d} g_{(i)} h_{(j)}.$$

Le terme $g_{(a)}h_{(c)}$ est un polynôme homogène de degrée $a+c$. Le terme $g_{(b)}h_{(d)}$ est un polynôme homogène de degrée $b+d$. Mais tous les autre polynômes de la forme $g_{(i)}h_{(j)}$ sont de degrée $a+c < i+j < b+d$, donc $F = GH$ n'est pas homogène, **ou** $a+c = b+d$. Ensemble, $a \leq b$, $c \leq d$ et $a+c = b+d$ implique que $a = b$ et $c = d$, ca veut dire que G, H sont homogène.

(11) ** Soit R un anneau (commutatif et avec unité), et soi I un idéal, $I \neq 0$ et $I \neq R$. Montrez que :*

(a) *Le quotient R/I est un anneau, avec les opérations d'addition et de multiplication induites par les mêmes opérations que R.*

(b) *L'idéal I est premier si et seulement si R/I est un anneau intègre.*

(c) *L'idéal I est maximale si et seulement si R/I est un corps.*

On peut trouver les preuves en ligne. Il ne faut pas les savoir pour l'examen de mi-saison.

(12) *Montrez que $\mathbb{K}[X]$ a un nombre infinie des polynômes irréductibles moniques (un polynôme est monique si le coefficient de la plus grand puissance de X, qui est non-nulle, est 1). Conseil : supposez que $F_1, \dots, F_n$ sont tous les polynômes irréductibles moniques, et considérez le factorisation de $F_1 \cdot F_2 \cdot \cdots \cdot F_n + 1$ en irréductibles.*

$G = F_1 \cdots F_n + 1$ est aussi monique et non-inversible parce que $\deg G > 1$. Si il existe F_i tel que $F_i | G$, alors $F_i | 1$ et F_i n'était pas irréductible. Donc les facteur irréductible de G sont différent que tous les F_i, ce qui contredit le supposition que les F_i sont tous les polynômes moniques.

(13) *Montrez que chaque corps $\mathbb{K}$ qui est algébriquement fermé est infinie. Il peut vous aider d'utiliser que si $\mathbb{K}$ est algébriquement fermé, les polynômes irréductibles moniques sont de la forme $X - a$, $a \in \mathbb{K}$.* Si $\mathbb{K}$ était fini, il y aurais seulement une nombre fini de polynômes irréductibles moniques de la forme $X - a$, ce qui contredit (12).

(14) Calculez le résultant $R(f, g)$ de ces polynômes suivants :

(a) $f(x) = x^2 + 3x - 1$, $g(x) = 3x^3 - 2x + 2$.

(b) $f(x) = 2x^2 - 3x - 2$, $g(x) = 2x - 1$.

(a) -147, (b) -12.

(15) Calculez le résultant $R(f, g)(y)$, par rapport au variable y de ces polynômes suivants, qui est dans $\mathbb{R}[x][y]$:

(a) $f(x) = xy^2 + 3y^2 - 1$, $g(x) = 3y - 2x + 2$.

(b) $f(x) = 2x^2 - 3xy - 2y^2$, $g(x) = 2xy - y^2$.

(a) $(x + 3)(2 - 2x)^2 - 9$, (b) $-24x^4$.