Courbes algébriques devoir 1

(1) Montrez que les sous-ensembles suivant sont des courbes algébriques affines :
   (i) $\{(t^3, t^4) \mid t \in \mathbb{R}\}$;
   (ii) $\{r = \sin\theta\}$, en coordinées polar.

(2) Décrivez les courbes algébriques dans la droite affine $\mathbb{A}^1(\mathbb{K})$.

(3) Donnez l'équation du conique $x^2 - 3xy + y^2$ en utilisant les nouvelles coordonées affines, determinées par les vecteurs $\{(1,1),(2,-1)\}$ et le nouveau point d'origine $(3,2)$.

(4) Calculez le nombre d'intersection $I_0(ax+by, cx+dy)$ pour tous $a,b,c,d \in \mathbb{R}$. La reponse sera influencée par le choix des 4 nombre. On vois que le choix de coordonées n'a pas d'importance pour deux courbes de degrée 1.

(5) Trouvez les nombres d'intersections $I_0(f,g)$ entre les pairs des courbes suivantes.
   (a) $f(x,y) = xy^4 + y^3 - x^2$ et $g(x,y) = y^5 + x^2 - xy$.
   (b) $f(x,y) = y^3 - x^3$ et $g(x,y) = y^2 - x^3$.
   (c) $f(x,y) = y - x^3$ et $g(x,y) = y^4 + 6x^3y + x^8$.

(6) Combiens des points y a-t-il dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_p)$, où p est un entier premier et $\mathbb{F}_p$ est le corps avec p éléments.

(7) Est-ce que les droites affines $-2x + 4y = 1$ et $x - 2y + 3 = 0$ s'intersect ? Quelles sont les courbes projectifs qui correspond, est-ce que les courbes projectifs s'intersect, et si-oui, où ?

(8) Trouvez les formes homogènes des polynômes :
   (i) $y^2 - 3xy + 5x - 2y - 21$
   (ii) $x^4 + 3x^2y - 4y^4 + 5y^3 + y^2 + 2x + 6$.

(9) Donnez un élément de $PGL(2,\mathbb{R})$ qui envois les quatre points

$$\{[1,0,0],[0,1,0],[0,0,1],[1,1,1]\}$$

dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ à les quatre points

$$\{[0,2,1],[1,2,-1],[0,1,0],[1,3,2]\}.$$

Rappelez-vous qu'on peut multiplier un triple par un élément $\lambda \in \mathbb{R}$ sans modifier le point representé par le triple.

(10) (a) Soit F et G les polynômes homogènes de degrés r, s dans $\mathbb{K}[X, Y, Z]$. Montrez que FG est aussi un polynôme homogène.

(b) Montrez que chaque les facteur d'un polynôme homogène dans $\mathbb{K}[X, Y, Z]$ est aussi un polynôme homogène.

(11) Soit R un anneau (commutatif et avec unité), et soi I un idéal, $I \neq 0$ et $I \neq R$. Montrez que :

(a) Le quotient R/I est un anneau, avec les opérations d'addition et de multiplication induites par les mêmes opérations que R.

(b) L'idéal I est premier si et seulement si R/I est un anneau intègre.

(c) L'idéal I est maximale si et seulement si R/I est un corps.

(12) Montrez que $\mathbb{K}[X]$ a un nombre infinie des polynômes irréductibles moniques (un polynôme est monique si le coefficient de la plus grand puissance de X, qui est non-nulle, est 1). Conseil : supposez que $F_1, \ldots, F_n$ sont tous les polynômes irréductibles moniques, et considérez le factorisation de $F_1 \cdot F_2 \cdot \cdots \cdot F_n + 1$ en irréductibles.

(13) Montrez que chaque corps $\mathbb{K}$ qui est algébriquement fermé est infinie. Il peut vous aider d'utiliser que si $\mathbb{K}$ est algébriquement fermé, les polynômes irréductibles moniques sont de la forme $X - a$, $a \in \mathbb{K}$.

(14) Calculez le résultant $R(f, g)$ de ces polynômes suivants :

(a) $f(x) = x^2 + 3x - 1$, $g(x) = 3x^3 - 2x + 2$.

(b) $f(x) = 2x^2 - 3x - 2$, $g(x) = 2x - 1$.

(15) Calculez le résultant $R(f, g)(y)$, par rapport au variable y de ces polynômes suivants, qui est dans $\mathbb{R}[x][y]$:

(a) $f(x) = xy^2 + 3y^2 - 1$, $g(x) = 3y - 2x + 2$.

(b) $f(x) = 2x^2 - 3xy - 2y^2$, $g(x) = 2xy - y^2$.