Courbes algébriques devoir 2 racines

(1) *Montrez que chaque polynôme homogène de deux variables dans $\mathbb{C}[x,y]$ est un produit de facteurs linéaires.*

Soit $F(x,y)$ un polynôme homogène de degré n. Définissez $G(x,y) = F(x,y)/y^n$. C'est un polynôme d'une variable $g(z)$, $z = x/y$, parce que F est homogène. Par le théorème fondamental d'algèbre, $g(z) = \prod_{i=1}^n (a_i z + b_i)$. Donc $F(x,y) = y^n G(x,y) = y^n g(x/y) = \prod_{i=1}^n (a_i x + b_i y)$.

(2) * *Démontrez le théorème de Pappus : soient D_1, D_2 deux droites distinctes dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, soient P_1, P_2, P_3 trois points différents qui se trouvent sur D_1, et soient Q_1, Q_2, Q_3 trois points différents qui se trouvent sur D_2. Soit L_{ij} la droite unique dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ qui passe par P_i et Q_j. Soit $R_k = L_{ij} \cap L_{ji}$ pour chaque triple (i,j,k) tel que $\{i,j,k\} = \{1,2,3\}$. Alors les trois points R_1, R_2, R_3 sont colinéaires.*

Si un des point P_i ou Q_i est le point dans $D_1 \cap D_2$, on doit vérifier que deux des R_i coïncident, et donc les trois R_i sont colinéaire. Si aucun P_i, ni acun Q_i, n'est pas dans $D_1 \cap D_2$, on doit montrer qu'on a $R_i \cap D_j = \emptyset$ pour tous i, j.

Puis soit $C = L_{12} \cup L_{23} \cup L_{31}$ et $C' = L_{21} \cup L_{32} \cup L_{13}$. Ce sont deux cubiques, qui s'intersectent en 9 points. Parmi ceux-ci, il y en a 3, les P_i, qui sont sur une droite. Donc les 6 autres point sont sur une conique C''. Mais trois de ces 6 points sont sur la droite D_2, donc par Bézout on voit que D_2 est une composante de C''. L'autre composante, qui contient les R_i, doit être aussi une droite.

(3) * *Calculez les ordres des points singuliers des courbes suivantes :*

La méthode la plus facile c'est d'utiliser les homogénisations. Un point $p = [X,Y,Z] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ est un point singulier de F si et seulement si $\nabla F(p) = 0$. On n'a pas besoin de vérifier que $F(p) = 0$, c'est automatiquement le cas par la formule d'Euler.

(i) *l'ovoid : $V((x^2+y^2)^2 - x^3)$;*
Soit $F(X,Y,Z) = (X^2+Y^2)^2 - X^3 Z = X^4 + 2X^2Y^2 + Y^4 - X^3 Z$. On a

$$\nabla F = (4X^3 + 4XY^2 - 3X^2 Z, 4X^2 Y + 4Y^3, -X^3).$$

Si $\nabla F = 0$, on a $X^3 = 0$ par la dernière coordonnée, donc $X = 0$. Puis $Y^3 = 0$, est donc $Y = 0$. Il y a un point singulier, à $[0,0,1]$.

Retournant au plan affine, on a un seul point singulier a l'origine, et son ordre est 3. Afin de voir l'ordre, notez qu'on peut lire le développement de Taylor à l'origine directement de la polynôme. $f(x,y) = (x^2+y^2)^2 - x^3 = f_{(3)} + f_{(4)}$, et on a $f_{(3)} = -x^3, f_{(4)} = (x^2+y^2)^2$.

(ii) *le Folium de Descartes :* $V(x^3+y^3-3xy)$;
Soit $F(X,Y,Z) = X^3+Y^3-3XYZ$. Alors $\nabla F = (3X^2-3YZ, 3Y^2-3XZ, -3XY)$. Puis $\nabla F = 0$ implique que $X = 0$ ou $Y = 0$. Mais $0 = \nabla(F)(0,Y,Z) = (3YZ, 3Y^2, 0) \Rightarrow Y = 0$. De l'autre côté, $0 = \nabla F(X,0,Z) = (3X^2, -3XZ, 0) \Rightarrow X = 0$. Donc il y a un point singulier à $[0,0,1]$, Ça veut dire le point $(0,0) \in \mathbb{A}^2(\mathbb{C})$, qui est d'ordre 2 puisque $f_{(0)} = f_{(1)} = 0$ mais $f_{(2)} = -3xy$ et $f_{(3)} = x^3+y^3$.

(iii) *le Lemniscate :* $V((x^2+y^2)^2 - 2(x^2-y^2))$.
Soit $F(X,Y,Z) = X^4+2X^2Y^2+Y^4-2X^2Z^2-2Y^2Z^2$. Alors $\nabla F = (4X^3+4XY^2-4XZ^2, 4X^2Y+4Y^3-4YZ^2, -4X^2Z-4Y^2Z)$. Nous cherchons les points avec $Z = 1$. On sait que $Z \neq 0 \Rightarrow X^2+Y^2 = 0$ en utilisant la 3me coordonnée. Donc $X = \pm iY$, ce qui nous donne $\partial F/\partial Y = -4Y$, donc $Y = 0 = X$. Il y a un point singulier d'ordre 2 à l'origine car $f_{(2)} = -2(x^2-y^2)$.

(4) *Trouvez la droite tangente de* $V(3x^2-4xy+2y^2-1)$ *à* $(1,1)$.
On a $\nabla f = (6x-4y, 4y-4x)$. Pour $(x,y) = (1,1)$, c'est égal à $(2,0)$. Donc la droite tangente est $V(2(X-1)) = V(X-1)$.

(5) * *Trouvez une paramétrisation rationelle pour l'ovoid* $C = V((x^2+y^2)^2 - x^3)$. *Afin de le faire, trouvez une paramétrisation projective* $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \to \widehat{C} \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, *et puis donnez deux paramétrisations rationelle* $\mathbb{A}^1(\mathbb{C}) \to C \subset \mathbb{A}^2(\mathbb{C})$ *tel que l'union des images est* C.

$f_{(4)} = (X^2+Y^2)^2$ et $f_{(3)} = -X^3$. Assertion : L'ovoid ne contient pas de droite. Sachant qu'il y a seulement un point singulier, à l'origine, on sait que s'il y avait une droite composante, la droite ne s'intersecterait pas le reste de la courbe. Donc il faut qu'il y ait une composante qui soit une droite qui passe par l'origine, ou qu'il n'y ait aucune droite comme composante. Mais on peut vérifier avec un peu de sueur que aucun polynôme de la forme $aX + bY$ divise l'homogénisation $F(X,Y,Z) = (X^2+Y^2)^2 - X^3Z$ de $f(x,y) = (x^2+y^2)^2 - x^3$. Fin de preuve d'assertion.

Maintenant, nous pouvons appliquer la méthode de la classe, car la courbe est de dégre $4 = n$ et il n'y a qu'un seul point singulier d'ordre

$3 = n-1$. La méthode nous donne :

$$\begin{array}{rcl} \phi\colon \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) & \to & \widehat{C} \\ [t_0, t_1] & \mapsto & [t_0^4, t_1 t_0^3, (t_0^2+t_1^2)^2]. \end{array}$$

C'est égal à

$$\left[\frac{t_0^4}{(t_0^2+t_1^2)^2}, \frac{t_1 t_0^3}{(t_0^2+t_1^2)^2}, 1\right]$$

si $[t_0, t_1] \neq [\pm i, 1]$. Pour $t_1 \neq 0$ on peut écrire $[t_0, t_1] = [t_0/t_1, 1]$. Soit $t := t_0/t_1$, et on obtient

$$\begin{array}{rcl} \phi\colon \mathbb{A}^1(\mathbb{C}) \setminus \{i, -i\} & \to & C \\ t & \mapsto & \left(\frac{t^4}{(t^2+1)^2}, \frac{t^3}{(t^2+1)^2}\right) \end{array}$$

qui a l'image $C \setminus \{(1,0)\}$. Si $t_0 \neq 0$ on peut écrire $[t_0, t_1] = [1, t_1/t_0]$. Soit $s := t_1/t_0$ et on obtient

$$\begin{array}{rcl} \phi\colon \mathbb{A}^1(\mathbb{C}) \setminus \{i, -i\} & \to & C \\ s & \mapsto & \left(\frac{1}{(1+s^2)^2}, \frac{s}{(1+s^2)^2}\right) \end{array}$$

qui a l'image $C \setminus \{(0,0)\}$.

(6) *Trouvez tous les droites tangentes à l'origine pour les courbes algébriques affines suivantes :*

(i) *L'ovoid* $V((x^2+y^2)^2 - x^3)$

(ii) *Le trefle :* $V((X^2+Y^2)^2 + 3X^2Y - Y^3)$.

Nous savons, grâce à (3), et grâce au cours, que les deux courbes ont des points singuliers à l'origine d'ordre 3. Soit $[a,b] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ et soit $\phi_{[a,b]}\colon t \mapsto (at, bt)$, une paramétrisation d'une droite contenant l'origine.

(i) $g(t) = f \circ \phi(t) = (a^2t^2 + b^2t^2)^2 - a^3t^3$. Donc

$$\operatorname{ord}_0 g(t) = \begin{cases} 3 & a \neq 0 \\ 4 & a = 0, \end{cases}$$

et $a = 0$ donne la droite tangente $V(X)$.

(ii) $g(t) = (a^2+b^2)^2t^4 + (3a^2b - b^3)t^3$. Donc

$$\operatorname{ord}_0 g(t) = \begin{cases} 4 & b = 0 \\ 4 & a = 3b \\ 4 & a = -3b \\ 3 & \text{autrement.} \end{cases}$$

Les droites tangentes sont $V(Y)$, $V(X-3Y)$ et $V(X+3Y)$.

(7) *Quelles sortes de points singuliers ont la courbe*

$$F(X,Y,Z) = X^2Y^5 - X^5Y^2 - 2XY^5Z + X^5Z^2 + Y^5Z^2 - X^3YZ^3 + 2\alpha X^2Y^2Z^3 - XY^3Z^3,$$

où $\alpha \in \mathbb{C}$*, aux points* $[1,0,0]$*,* $[0,1,0]$ *et* $[0,0,1]$*. Quels sont les ordres ? Exprimez les droites tangentes comme diviseurs.*

On peut vérifier que les trois points donnés sont points singuliers. Puis, regardez les trois parties affines $(x,y,1)$, $(x,1,z)$ et $(1,y,z)$. Les points singulier qui nous intéressent sont les points d'origines des trois parties affines.

$$f(x,y) = F(x,y,1) = x^3y - xy^3 + 2\alpha x^2y^2 + \text{ termes de plus haut degré.}$$

Le point $[0,0,1]$, c'est un point singulier d'ordre 4. Soit $\phi_{[a,b]} : t \mapsto (at, bt)$ et $g(t) = f \circ \phi_{[a,b]}(t)$. Le terme de degré 4 devient

$$ab(2\alpha ab - a^2 - b^2)t^4,$$

qui est nul si $a = 0$, $b = 0$ ou $a = b(\alpha \pm \sqrt{\alpha^2-1})$. Donc les droites tangentes sont le diviseur

$$V(X) + V(Y) + V(X - Y(\alpha + \sqrt{\alpha^2-1})) + V(X - Y(\alpha - \sqrt{\alpha^2-1})).$$

Si $\alpha \neq \pm 1$ $[0,0,1]$ est un point simple d'ordre 4, si $\alpha = \pm 1$ ce n'est pas simple, est le diviseur devient

$$V(X) + V(Y) + 2 \cdot V(X \mp Y).$$

Puis,

$$f(x,z) = F(x,1,z) = x^2 - 2xz + z^2 + \text{ t.d.p.h.d.}$$

Le terme de degré 2 de $g(t)$ est $(a-b)^2t^2$, donc $[0,1,0]$ n'est pas un point simple, mais un point singulier d'ordre 2. Le diviseur tangente est $2V(X-Z)$. Finalement,

$$f(y,z) = F(1,y,z) = -Y^2 + Z^2 + \text{ t.d.p.h.d.}$$

Le terme de degré 2 de $g(t)$ est $(a^2-b^2)t^2$, donc $[1,0,0]$ est un point simple. Le diviseur tangente est $V(Y-Z)+V(Y+Z)$.

(8) *Trouvez les points singuliers des courbes projectives suivantes :*
   (i) $XZ^2 - Y^3 + XY^2$;
   $[1,0,0]$
   (ii) $(X+Y+Z)^3 - 27XYZ$;
   $[1,1,1]$.

(9) * *Montrez que pour chaque $n > 0$ il y a une courbe projective non-singulière de degré n.*
Par exemple, prenez $F(X,Y,Z) = X^n + Y^n + Z^n$. On a

$$\nabla F = (nX^{n-1}, nY^{n-1}, Z^{n-1}),$$

qui ne s'annule jamais dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. Donc c'est une courbe non-singulière. (On remarque que ça implique qu'elle est irréductible, car deux composantes doivent s'intersecter, est chaque point d'intersection entre deux courbes C, C' est un point singulier de la courbe $C \cup C'$.)