Courbes algébriques devoir 2

(1) Montrez que chaque polynôme homogène de deux variables dans $\mathbb{C}[x, y]$ est un produit de facteurs linéaires.

(2) * Démonstrez la théorème de Pappus : soient D_1, D_2 deux droites distincte dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, soient P_1, P_2, P_3 trois points différents qui à lieu en D_1, et soient Q_1, Q_2, Q_3 trois points différents qui à lieu en D_2. Soit L_{ij} la droite unique dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ qui passe par P_i et Q_j. Soit $R_k = L_{ij} \cap L_{ji}$ pour chaque triple (i, j, k) tel que $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$. Alors les trois points R_1, R_2, R_3 sont colinéaires.

(3) * Calculez les ordres des points singuliers des courbes suivantes :
   (i) l'ovoid : $V((x^2 + y^2)^2 - x^3)$;
   (ii) le Folium de Déscartes : $V(x^3 + y^3 - 3xy)$;
   (iii) le Lemniscate : $V((x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2))$.

(4) Trouvez la droite tangente de $V(3x^2 - 4xy + 2y^2 - 1)$ à $(1, 1)$.

(5) * Trouvez un parametrisation rationale pour l'ovoid $V((x^2 + y^2)^2 - x^3)$.

(6) Trouvez tous les droites tangentes à l'origine pour les courbes algébriques suivantes :
   (i) L'ovoid $V((x^2 + y^2)^2 - x^3)$
   (ii) Le clover de trois feuilles : $V((X^2 + Y^2)^2 + 3X^2Y - Y^3)$.

(7) Quelles sortes de points singuliers ont la courbe

$$X^2Y^5 - X^5Y^2 - 2XY^5Z + X^5Z^2 + Y^5Z^2 - X^3YZ^3 + 2\alpha X^2Y^2Z^3 - XY^3Z^3,$$

où $\alpha \in \mathbb{C}$, aux points $[1, 0, 0]$, $[0, 1, 0]$ et $[0, 0, 1]$.

(8) Trouvez les points singuliers des courbes suivantes :
   (i) $XZ^2 - Y^3 + XY^2$;
   (ii) $(X + Y + Z)^3 - 27XYZ$; et
   (iii) $X^2Y^2 + 36XZ^3 + 24YZ^3 + 108Z^4$.

(9) La courbe $X^3 + Z^3 + Z^3 + k(X + Y + Z)$ a les points singuliers pour quels k ? Pour chaque tel k, trouvez les points singuliers.

(10) Montrez que la courbe donnée par $XY^2 + YZ^2 + ZX^2 + X^2Y + Y^2Z + Z^2X + kXYZ$ est non-singulière si $k \neq 2, 3, 6$.

(11) * Montrez que pour chaque $n > 0$ il y a une courbe non-singulière de ordre n.