Courbes algébriques devoir 3

(1) * *Montrez que l'equation d'une cubique cuspidale projective peut être ramenée en la forme* $X^3 - Y^2Z = 0$. *Une cubique cuspidale est une courbe algébrique irréductible de degrée 3 avec un point singulier d'ordre 2, et le point singulier a une droite tangente seul ; ça veut dire que le point singulier ne soit pas simple.*

On peut trouver le preuve dans le livre de Gibson. Bien fait dans le devoir, sauf que pour certaines, ll faut utiliser le fait que le multiplicité d'intersection entre la courbe et sa droite tangente et égal à 3, pour simplifier le formule générique. Vous l'avez fait, mais sans explication.

(2) *Par définition, soit l'ordre d'un point* $p \in C \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ *égal à* $\min\{k \mid F_{(k)} \neq 0\}$, *où* $F_{(k)}$ *est le partie de degrée* k *du développement de Taylor par rapport au* p

$$F_{(k)} = \sum_{i+j+\ell=k} \frac{\partial^k F}{\partial^i X \partial^j Y \partial^\ell Z}(p) X^i Y^j Z^\ell.$$

Montrez que l'ordre d'un point est le même que le définition donné pendant le cours (passez à une partie affine et calculer l'ordre en utilisant le développement de Taylor de 2 variables, par rapport au point affine qui corréspond à p.) Le formule d'Euler et sa derivées seraient utile.

On peut supposer que $p = [0, 0, 1]$. On veut montrer que si $F(p) = 0$ et tous les derivées partielles par rapport au X et Y sont nuls à p, on a aussi que les derivées par rapport au Z sont aussi nuls. Pour F homogéne, on a le Formule d'Euler. Par formule d'Euler, si $F(p) = F_X(p) = F_Y(p) = 0$, on a aussi $F_Z(p) = 0$. Prennez les derivées du Formule d'Euler. Par exemple,

$$(n-1)F_X = XF_{XX} + YF_{YX} + ZF_{ZX}.$$

Si, à p, $F_X = F_{XX} = F_{YX} = 0$, on a aussi $F_{ZX}(p) = 0$. On peut continuer avec tous les derivées partielles, et par induction. C'est pour vous à écrire le preuve formale.

(3) * *Trouvez les points d'inflexions du Folium de Déscartes* $X^3 + Y^3 = XYZ$. *Lesquels sont simples ?*

Il y en a 3, c'est à dire $[1, -\omega, 0]$, où ω est un troisième racine d'unité. Il y a aussi un point singulier à $[0, 0, 1]$. Tous les points d'inflextions sont simple.

(4) *Montrez q'un cubique irréductible a au plus un point singulier. (Donnez un argument direct, car c'est un cas special d'un theorème du cours.)*

Si il y avait deux points singuliers, le droite qui contient les deux serait une composante de la cubique par Bézout et l'inégalité ordre-multiplicité.

(5) * *Soit C une courbe projective de degrée 4, avec 4 points singulier d'ordre 2. Montrez que C est réductible. Quels sont les formes possible que les composants peuvent avoir ? C'est à dire, combien de composants et de quels degrées ?*

Si C était irréductible, il y aurait au plus $(4-2)(4-1)/2 = 3$ points singuliers. Donc C est réductible. Les trois possibilités sont :

(a) Une cubique singulière irréductible est une droite qui manque le point singulier de la cubique.

(b) Deux coniques irréductibles qui s'intersectent en 4 points différents.

(c) Une conique et deux droites. La première droite est une droite tangente de la conique et la seconde droite et la conique s'intersectent en 2 points.

(6) *Soit F un polynôme homogène de degrée n et soit G un polynôme homogène de degrée $n+1$, tels que F et G n'ont pas de facteur en commune. Montrez que $F+G$ est irréductible. Afin de le faire, prenez $F+G = AB$ avec $A = A_p + A_{p+1} + \dots A_{p'}$, où A_i est homogène de degrée i. Faisez-le similairement avec $B = B_q + B_{q+1} + \dots B_{q'}$. Montrez que $p = p'$ ou $q = q'$, et d'où que F et G ont un facteur en commun.*

C'est un fait très utile pour montrer qu'une courbe soit irréductible. Rappellez que c'est une tâche assez difficile en générale. On peut trouver le preuve de ce lemme-ci dans le livre de Gibson.

(7) *Trouver une courbe de degrée 4 dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ ayant exactement 3 points singuliers.*

Une conique est deux droites tangentes de la conique. Ou deux coniques, avec deux points d'intersections simples et un point d'intersections de multiplicité 1 et un point d'intersection de multiplicité 2.

(8) *Montrez que par 5 points non-collinéaire de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ passe exactement une conique.*

$5 = 2(2+3)/2$, i.e. $n = 2$, nous avons $5 = n(n+3)/2$. Par chaque $n(n+3)/2$ points dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, il existe une courbes projective de degrée au plus n, qui contient tous les points. Afin de le voir, montrez que l'éspace vectoriel de polynômes homogènes de degrée n sur $\mathbb{C}$ est de dimension $\binom{n+2}{n}$ (pourquoi ?). Puisque nous voulons considèrer deux polynômes $F, \lambda F$ identiques, nous obtenons un éspace projective $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ où $N = \binom{n+2}{n} - 1 = \frac{n(n+3)}{2}$. Chaque point nous donne une condition linéaire. Donc si nous avons au plus $n(n+3)/2$ points, il existe au moin une courbe algébrique de degrée n qui satisfait les conditions.

Puisque aucun trois points ont lieu sur une droite, c'est une conique irréductible. S'il y a deux coniques qui contient les mêmes 5 points, les deux coniques ont une composante en commune, par le théorème de Bézout. Ils sont irréductible, donc ils coincident.