Courbes algébriques devoir 3

(1) * Montrez que l'equation d'une cubique cuspidale projective peut être ramenée en la forme $X^3 - Y^2Z = 0$. Une cubique cuspidale est une courbe algébrique de degrée 3 avec un point singulier d'ordre 2, et le point singulier a une droite tangente seul ; ça veut dire que le point singulier ne soit pas simple.

(2) Par définition, soit l'ordre d'un point $p \in C \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ égal à $\min\{k \mid F_{(k)} \neq 0\}$, où $F_{(k)}$ est le partie de degrée k du développement de Taylor par rapport au p

$$F_{(k)} = \sum_{i+j+\ell=k} \frac{\partial^k F}{\partial^i X \partial^j Y \partial^\ell Z}(p) X^i Y^j Z^\ell.$$

Montrez que l'ordre d'un point est le même que le définition donné pendant le cours (passez à une partie affine et calculer l'ordre en utilisant le développement de Taylor de 2 variables, par rapport au point affine qui corréspond à p.) Le formule d'Euler et sa derivées

(3) * Trouvez les points d'inflexions du Folium de Déscartes $X^3+Y^3 = XYZ$. Lesquels sont simples ?

(4) Montrez q'un cubique irréductible a au plus un point singulier. (Donnez un argument direct, car c'est un cas special d'un theorème du cours.)

(5) * Soit C une courbe projective de degrée 4, avec 4 points singulier d'ordre 2. Montrez que C est réductible. Quels sont les formes possible que les composants peuvent avoir ? C'est à dire, combien de composants et de quels degrées ?

(6) Soit F un polynôme homogène de degrée n et soit G un polynôme homogène de degrée $n+1$, tels que F et G n'ont pas de facteur en commune. Montrez que $F+G$ est irréductible. Afin de le faire, prenez $F+G = AB$ avec $A = A_p + A_{p+1} + \dots A_{p'}$, où A_i est homogène de degrée i. Faisez-le similairement avec $B = B_q + B_{q+1} + \dots B_{q'}$. Montrez que $p = p'$ ou $q = q'$, et d'où que F et G ont un facteur en commun.

(7) Trouver une courbe de degrée 4 dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ ayant exactement 3 points singuliers.

(8) Montrez que par 5 points non-collinéaire de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ passe exactement une conique.