MAT2410: CALCUL DES FORMES DIFFÉRENTIELLES
EXAMEN PRATIQUE

Problème 1. Soient $\phi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est $\psi\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^\ell$ deux fonctions lisses.

(1) Montrez que $\phi^* \circ d(\omega) = d \circ \phi^*(\omega)$ pour toute $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^m)$.

(2) Montrez que $\phi^* \circ \psi^* = (\psi \circ \phi)^* \colon \Omega^k(\mathbb{R}^\ell) \to \Omega^k(\mathbb{R}^n)$.

(3) Montrez que $d \circ d(\omega) = 0$ pour toute $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$. Montrez que $\mathrm{rot}(\nabla(f)) = 0$ pour toute fonction $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ lisse.

Problème 2.

(i) Soit $\mathbf{F}$ un champ vectoriel lisse sur $\mathbb{R}^3$, et soit $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^3$ une courbe lisse. Montrez que

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = \int_\gamma \alpha_{\mathbf{F}},$$

où $\alpha_{\mathbf{F}} = \sharp\mathbf{F}$.

(ii) En supposant qu'il existe $\phi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ lisse telle que $\mathbf{F} = \nabla\phi$, montrez que $\alpha_{\mathbf{F}} = \mathrm{d}\phi$ et que

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = 0$$

pour toute courbe γ qui est fermée, lisse, et simple, en énoncant clairement les théorèmes que vous employez.

(iii) Soit $f(x,y,z) = e^{-x}\sin y$. Trouvez $\mathbf{F} := \nabla f$. Calculez l'intégrale

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s}$$

où

$$\begin{array}{rcl} \gamma\colon [0,1] & \to & \mathbb{R}^3 \\ t & \mapsto & (-t\ln 2, t\pi/2, 3\sin(t^2)). \end{array}$$

Problème 3. Trouvez $\int_c \omega$, où $\omega = xy^2\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ et

$$\begin{array}{rcl} c\colon [0,1]\times[0,1] & \to & \mathbb{R}^2 \\ (u,v) & \mapsto & (u^2+v^2, 2uv). \end{array}$$

Problème 4. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ la région $[0,2] \times [0,2] \times [0,2]$. Soit $\partial\Omega$ son bord est soit $\Sigma = \partial\Omega \setminus (\text{plan } z = 0)$. Alors $\partial\Sigma$ est le bord de $\Omega \cap (\text{plan } z = 0)$. Vérifiez le théorème de Stokes classique

$$\int_{\partial\Sigma} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = \int_{\Sigma} \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$$

dans le cas où

$$\mathbf{F} = (y - z + 2, yz + 4, -xz).$$

Vous pouvez traduire dans le langage des formes différentielles, mais ceci n'est pas obligatoire.

Problème 5.

(i) Trouvez

$$d\left(\frac{1}{2}(x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x)\right).$$

(ii) Trouvez l'aire délimitée par la boucle passant par l'origine du "Folium de Descartes" donné par $x^3 + y^3 = 3axy$ $(a > 0)$.

(iii) Trouvez l'aire délimitée par les deux boucles de la lemniscate donnée en coordonnées polaires par $r^2 = a^2 \cos(2\theta)$.

Problème 6. Soit Σ l'hémisphère supérieur (i.e. $z \geq 0$) de la sphère unité dans $\mathbb{R}^3$ centrée à l'origine. Trouvez l'intégrale

$$\int_{\Sigma} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$$

où

$$\mathbf{F} := (x, y, -2z).$$

Indice: faites la comparison avec l'integrale de $\mathbf{F}$ sur le disque unité dans le plan $z = 0$.